FEUILLE D'EXERCICES

EX 1 : Montrer sans calcul que la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse .

EX 2 : Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$, on pose

$$\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_2y_1 + x_1y_2$$

- 1) Exprimer $\varphi(x, y)$ en fonction des matrices colonnes X et Y associées à x et y .
- 2) Montrer (rapidement) que φ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$.
- 3) A l'aide de la base canonique $\mathbf{B}$ de $\mathbf{R}^3$, déterminer à l'aide du procédé de Schmidt une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ pour φ .

EX 3* :** $\mathcal{M}_n[\mathbf{R}]$ est muni du produit scalaire défini par $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$ (déjà étudié...).

- 1) Montrer que la norme associée, $\|\cdot\|$, vérifie : $\forall A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad \|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$
- 2) Etablir que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad |\text{tr} A| \leq \sqrt{n} \|A\|$ (on pourra remarquer que $A = I_n \times A$ et appliquer l'inégalité de Cauchy Schwarz)
- 3) Montrer que $S_n(\mathbf{R})$ et $A_n(\mathbf{R})$ sont supplémentaires orthogonaux .
- 4) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$. Montrer que $\min_{M \in S_n(\mathbf{R})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - m_{i,j})^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} - a_{j,i})^2$.

EX 4 : On pose pour tout couple (A, B) de polynômes de $\mathbf{R}_3[X]$.

$$\langle A, B \rangle = A(1)B(1) + A'(1)B'(1) + A''(1)B''(1) + A'''(1)B'''(1)$$

- 1) Prouver que l'application $(A, B) \xrightarrow{\varphi} \langle A, B \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_3[X]$.

On notera $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$.

- 2) On considère ici $\mathbf{R}_2[X]$ comme un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$.

Déterminer à l'aide de la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ et du procédé de Schmidt une base orthonormée de $\mathbf{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Vérifier que le polynôme $\frac{1}{6}(X^3 - 3X^2 + 3X - 1)$ appartient au sous espace $[\mathbf{R}_2[X]]^\perp$ de $\mathbf{R}_3[X]$.

- 3) Prouver l'existence et l'unicité d'un polynôme P_0 de $\mathbf{R}_2[X]$ minimisant

$$\|X^3 - P\| \text{ lorsque } P \text{ décrit } \mathbf{R}_2[X] \text{ . Déterminer } P_0 \text{ et } \|X^3 - P_0\| \text{ .}$$

EX 5 : On pose pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (x + y - 1)^2 + (2x - y + 1)^2 + (x - 1)^2$

Montrer par deux méthodes que f admet un minimum que l'on déterminera

EX 6 : Soit u un vecteur non nul d'un espace euclidien E .

Montrer en considérant une projection orthogonale que pour tout vecteur $x \in E$,

$$\min_{\alpha \in \mathbf{R}} \|x - \alpha u\|^2 = \|x\|^2 - \frac{\langle x, u \rangle^2}{\|u\|^2} \text{ .}$$

Application : déterminer $\min_{\alpha \in \mathbf{R}} \int_0^{+\infty} e^{-t} (t^{2015} - \alpha t)^2 dt$

(on pourra considérer le produit scalaire sur $\mathbf{R}_{2015}[X]$: $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t) dt$)

EX 7* :** Soit E un espace euclidien de dimension n . Soit u un endomorphisme de E .
Soit A la matrice de u dans une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E .

I) On suppose que $\forall x \in E \quad u(x) \perp x$. (1)

1) Montrer que $\forall x, y \in E \quad \langle u(x) | y \rangle = -\langle x | u(y) \rangle$ (2)
(on pourra remplacer x par $x + y$ dans (1))

2) En déduire que A est antisymétrique .
(on pourra remplacer x par e_i et y par e_j dans (2))

3) Démontrer que $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont supplémentaires orthogonaux .

4) Quelles sont les valeurs propres possibles de u ? u est-il diagonalisable ?

II) On suppose que A est antisymétrique. Montrer que $\forall x \in E \quad u(x) \perp x$.

EX 8 : Soit E un espace euclidien et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E tels que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2 \quad (1)$$

Démontrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E .

(on pourra remplacer x par e_k dans la relation (1)) .