FEUILLE D'EXERCICES ECS2

EX 1 : 1) X suit une loi binômiale $n = 200$ et $p = 0,4$.

Encadrer $P(70 \leq X \leq 90)$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev .

Calculer $P(75 \leq X \leq 85)$ en approchant (en le justifiant) la loi de X par une loi normale.

On donne $\Phi(\frac{5}{\sqrt{48}}) = 0,76$

2) Y suit une loi binômiale $B(n, p)$ de paramètres $n = 150$ et $p = 0,02$

Calculer $P(Y > 2)$ en approchant (en le justifiant) la loi de Y par une loi de Poisson .

3) Z suit une loi de Poisson de paramètre 25 . Calculer $P(Z \geq 25)$ et $P(Z < 30)$ en approchant (en le justifiant) la loi de Z par une loi normale.

On donne $\Phi(1) = 0,84$

EX 2 : Un groupe de n personnes portant les numéros 1 à n tirent tour à tour , avec remise un numéro entre 1 et n dans une urne . Une fois qu'elles ont chacune tiré un numéro , on regarde si le numéro tiré correspond au leur . Si l'une des personnes a tiré son propre numéro , on recommence la série des n tirages . Sinon on arrête .

On note X_n le nombre de séries de tirages qu'il faut effectuer pour que chaque personne ait obtenu un numéro différent du sien .

1) Donner la loi de X_n , puis la valeur de $E(X_n)$.

2) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi . A-t-on $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n) = E(Y)$?

EX 3 : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies par

$$X_n(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\} \text{ et } \forall k \in X_n(\Omega) \quad P(X_n = k) = \lambda_n k \quad (\lambda_n \in \mathbf{R})$$

1) Déterminer λ_n .

2) Soit X une variable sur $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ de loi uniforme sur $[0,1]$

a) Déterminer la loi de la variable $\sqrt{X}$ (on déterminera une densité)

b) Montrer que la suite des variables $Y_n = \frac{X_n}{n}$ converge en loi vers la variable $\sqrt{X}$

EX 4 : On pose pour $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

1) Vérifier que f est une densité de probabilité .

2) Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables indépendantes de densité f . On pose $M_n = \max\limits_{1 \leq k \leq n} X_k$

a) Déterminer la fonction de répartition de M_n .

b) On pose $T_n = n \exp(-M_n)$. Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable à densité T dont on reconnaîtra la loi .

EX 5 : On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω, A, P), mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\overline{X_n} = \frac{S_n}{n}$. On utilisera dans le 3) d) , l'approximation $\Phi(2,5) \simeq 0,995$.

1) Déterminer la loi suivie par λS_n En déduire celle de S_n et exprimer sa densité .

Donner l'espérance et la variance de S_n .

2) a) A l'aide du théorème de la limite centrée, établir que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq \frac{n}{\lambda}) = \frac{1}{2}}$.

b) En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} dt$ puis montrer que $\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2\, n^{n+1}}$.

3) a) On pose $b = \frac{1}{\lambda}$. Enoncer le théorème qui justifie que $(\overline{X_n})$ converge en probabilité vers la variable constante égale à b puis justifier que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais convergent de b .

b) On pose $T_n = \frac{\sqrt{n}}{b}\left(\overline{X_n} - b\right)$. A l'aide du théorème limite central , montrer que suite (T_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et réduite.

En déduire que pour n assez grand , la loi de $\overline{X_n}$ peut être approchée par la loi normale $\mathbf{N}(b , \frac{b^2}{n})$.

c) On suppose dans cette question que $b \leq 0,4$. En utilisant cette approximation par une loi normale, évaluer n afin que l'on puisse obtenir un intervalle de confiance de b de longueur $0,2$ au niveau de confiance 99%.

d) On possède une estimation ponctuelle de b , faite sur un échantillon de taille 100 ,égale à $0,25$.
Donner une estimation de l' intervalle de confiance de b au niveau de confiance 99% .

EX 6 : Afin d'étudier le pourcentage p de consommateurs satisfaits par un produit A , on a interrogé n consommateurs .
77% d'entre eux ont déclarés être satisfaits par A .
Donner par trois méthodes un intervalle de confiance à 95 % de p .
On donne $\Phi(2) = 0,975$ et $77 \times 23 = 42^2$.