FEUILLE D'EXERCICES ECS 2

EX 1 : Montrer dans les cas suivants que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$
et déterminer une base de E dans le cas où E est de dimension finie .
Donner un exemple de vecteur de E et donner ses coordonnées dans la base trouvée .

1) $E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \ / \ x-y=z-t\right\}$.

2) $E=\left\{f\in\mathbf{D}(\mathbf{R},\mathbf{R})/\forall x\in\mathbf{R},\ f'(x)=2f(x)\right\}$

(pour déterminer la dimension de E , on pourra dériver la fonction $g: x\to e^{-2x}f(x)$)

3) $E=\left\{(u_n)\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}/u_0+u_1=0\right\}$.

4) E ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix}$ où a et b sont des réels quelconques .

5) $E=\left\{(a+b)X^2+bX+a-b \ / \ a\in\mathbf{R},\ b\in\mathbf{R}\right\}$

EX 2 : 1) Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(u_1,u_2,....u_n)$ une famille de vecteurs de E .
Donner 5 méthodes pour pouvoir démontrer que $(u_1,u_2,....u_n)$ est une base de E .

2) Comment montrer rapidement que deux espaces vectoriels de dimension finie E_1 et E_2 sont égaux ?

EX 3 : On pose $f_k(x)=\exp(kx)$. ($k\in\mathbf{N}$)
Montrer que ($f_0, f_1,....., f_n$) est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathbf{D}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

EX 4* :** Quelle est la dimension de $\mathbf{M}_n[\mathbf{K}]$?

En déduire que pour toute matrice carrée A d'ordre n , la famille (I_n , A , A^2,......, A^{n^2}) est liée dans $\mathbf{M}_n[\mathbf{K}]$puis qu'il existe un polynôme P non nul de $\mathbf{K}_{n^2}[X]$ tel que $P(A)=0_{\mathbf{M}_n[\mathbf{K}]}$.

EX 5* :** On considère n complexes deux à deux distincts $\lambda_1,\lambda_2....,\lambda_n$.

Soit la matrice $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ de $\mathbf{M}_n[\mathbf{C}]$ de terme général $a_{ij}=\lambda_i^{j-1}$.

1) Ecrire la matrice A .

2) Démontrer que la matrice A est inversible (indication : montrer que ses colonnes forment une famille libre) .

EX 6 : Dans $\mathbf{R}_n[X]$ on considère $P_0=1$, $P_1=X-1$, $P_2=(X-1)^2$,...., $P_n=(X-1)^n$

1) Prouver que $(P_0,P_1,.....,P_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$

2) Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$ dans cette base ? (Penser à Taylor)

Quelle est la matrice de passage de la base $(1,X,X^2,.....,X^n)$ à la base $(P_0,P_1,...,P_n)$?

Quelle est la matrice de passage de la base $(P_0,P_1,...,P_n)$ à la base $(1,X,X^2,.....,X^n)$?

En déduire que pour $0\le i<j\le n$, $\displaystyle\sum_{k=i}^{j}(-1)^k\binom{k}{i}\binom{j}{k}=0$

EX 7** :**

Soit n un entier naturel et $(x_0, x_1, ..., x_n)$ une suite de $n+1$ éléments de $\mathbf{C}$ distincts deux à deux .
On définit alors $n+1$ polynômes $L_0, L_1, ..., L_n$ de la manière suivante :

$$\boxed{L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{X - x_k}{x_j - x_k} \qquad pour \ \ 0 \leq j \leq n}$$

1) Montrer que les polynômes L_j forment une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

2) Soit p un entier tel que $0 \leq p \leq n$.
Déterminer les coordonnées de X^p dans la base $(L_0, L_1, ..., L_n)$.
En déduire la matrice de passage de la base $(L_0, L_1, ..., L_n)$ à la base $(1, X, X^2, ..., X^n)$.