# FEUILLE D' EXERCICES ECS 2

**EX 1 :** Montrer qu'il existe un réel $A$ tel que pour tout $x > A$ , $\frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{x^3}$

( on pourra étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x}$ ) .

**EX 2** : Déterminer 1 ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$ 2 ) $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 2\cos x$ 4 ) $\lim\limits_{x\to+\infty} ( 1+\frac{a}{x} )^x$.

**EX 3** : Etudier la continuité de la fonction $x \to \lfloor x \rfloor$ ( fonction partie entière ) .

**EX 4 :** Soit $a \in ]0,1[$ .Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbf{R}$ , continue en 0 et telle que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(ax) = f(x)$.
Démontrer que $f$ est constante .

**EX 5 :** Montrer que la fonction $x \to x^5 e^{-x}$ est bornée sur $[0,+\infty[$ .

**EX 6 :** La fonction $x \to \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?

Même question pour $x \to \int_x^1 \frac{1}{t} dt$ .

**EX 7 :** 1 ) Si dans un voisinage de $x_0$ , $0 < f(x) < g(x)$ , que peut on dire de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ et de $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ?

2 ) Si $f$ est continue en 2 et si $f(2) > 0$ , que peut on dire du signe de $f$ ?
Même question avec $f(2) = 0$ .

3 ) Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $\mathbf{R}$ telles que $f(1)= 2$ ; $g(1)=3$ ; $\forall x \in \mathbf{R}\quad f(x) \neq g(x)$.
Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$ , $f(x) < g(x)$ .

**EX 8 :** Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ , $u_n = S_{2n}$ , $v_n = S_{2n+1}$ .

Montrer que les suites $(u_n)$ *et* $(v_n)$ sont adjacentes. En déduire que $(S_n)$ est convergente .

**EX 9 :** Etudier la convergence des suites $(u_n)$ suivantes :

1 ) $u_n = (1-\frac{1}{n})^{-n}$ 2 ) $u_n = a^n - b^n$ ( $a > 0$ , $b > 0$ ) .

**EX 10 :** 1 ) Montrer que l'équation $e^x = n - x$ $(n \geq 1)$ possède une solution unique réelle $x_n$ .

2 ) Etudier le sens de variation de la suite $(x_n)$ . Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ .

**EX 11 :**Indiquez l'ensemble de définition et calculer la dérivée lorsqu'elle existe des fonctions suivantes

1 ) $x \to \cos(\cos(\cos x))$ 2 ) $x \to (\ln x)^x$ 3 ) $x \to e^x \ln(\sin x)$

**EX 12 :** Déterminer $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2^x - 8}{x^2 - 9}$

**EX 13 :** Déterminer les dérivées $n$-ièmes des fonctions suivantes:

1 ) $x \to x^3 e^{-x}$ 2 ) $x \to \frac{1}{x^2 - 4}$ 3) $x \to \frac{2x}{x^2 - 4}$ 4) $x \to x^{n-1} \ln x$

**EX 14 :** Prouver que la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$. On note g sa fonction réciproque .

Prouver que g est indéfiniment dérivable sur]-1;1[ . Déterminer $g'(x)$.

**EX 15 :** Pour tout $x \geq 0$, on pose $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

1 ) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$ , $ch^2 x - sh^2 x = 1$ .

2 ) Montrer que *ch* est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$ .

La fonction $(ch)^{-1}$ est-elle dérivable sur $[1,+\infty[$ ? Expliciter $(ch^{-1})(x)$ et $(ch^{-1})'(x)$ .

**EX 16** : Montrer que $P(x) = (x-1)(x-2) + (x-2)(x-3) + (x-3)(x-1)$ a exactement deux racines réelles .

**EX 17** : Soit *f* dérivable sur **R** telle que $f'$ soit décroissante .

a ) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$ , $f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$ .

b ) En déduire que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}$ , alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ .

**EX 18 :** Montrer que $\forall f \in C^1([a,b],\mathbf{R})$ , $\exists K > 0$ , $\forall x, y \in [a,b]$ , $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$ .

**EX 19 :** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$ , $u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan u_n$ .

1 ) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$ $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|$ ( appliquer l'inégalité des accroissements finis ) .

2 ) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

**EX 20 :** 1 ) On pose pour $x \in [0,+\infty[$ , $f(x) = x\arctan(1+\sqrt{x})$ .

Montrer par deux méthodes que $f$ est de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$ .

2 ) On pose pour $x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$ . Etudier la dérivabilité de *f* sur $[0,+\infty[$ .