FEUILLE D'EXERCICES

EX 0 : Revoir le cours

EX 1 : Soit f l'endomorphisme d'un espace vectoriel E de base (e_1, e_2, e_3) définie par :

$$f(e_1)=\frac{1}{2}(e_1-e_2+e_3) \quad , \quad f(e_2)=e_2 \quad , \quad f(e_3)=\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3) \quad .$$

Déterminer fof . En déduire que f est un projecteur dont on déterminera les éléments caractéristiques . Etablir sans calcul que f est diagonalisable .

EX 2 : Déterminer le spectre et les vecteurs propres des matrice suivantes et préciser si elles sont diagonalisables 1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 2) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $C=\begin{pmatrix} 1+m & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 2+m \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbf{R}$

EX 3 : Soit $A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -10 & -6 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $(A+2I)^2=0$.

2) En déduire les valeurs propres de A . A est elle diagonalisable dans $\mathbf{M}_3[\mathbf{C}]$?

EX 4 : On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2)$ est $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les images des polynômes $P=1+X$, $Q=2+X^2$, $R=2+X+X^2$ par f .

2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .
puis les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

3) Prouver que f est diagonalisable . Calculer A^n en fonction de n $(n \in \mathbf{N})$.

4) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $3f+2Id_{\mathbf{R}_2[X]}$.

EX 5 : Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ canoniquement associé à A

Vérifier que -1, 0 , 4 sont des valeurs propres de A . f_A est elle diagonalisable ?

EX 6 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et s un endomorphisme de E tel que $s^2=Id$.

1) Montrer que si λ est une valeur propre de s , alors $\lambda^2=1$.

2) On pose $F_1=Ker(s-Id)$ et $F_2=Ker(s+Id)$.
Montrer que $\forall x \in E$, $s(x)+x \in F_1$ et $s(x)-x \in F_2$.
En déduire que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E .

3) On suppose $s \neq Id$ et $s \neq -Id$.
Etablir l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de s est diagonale .
En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de s .

4) Prouver que $p=\frac{1}{2}(s+Id)$ est le projecteur sur F_1 de direction F_2 .

EX 7 : On note j le nombre complexe égal à $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Rappeler la forme algébrique de j et les valeurs de j^3 et de $1+j+j^2$.

On note A la matrice de $\mathbf{M}_3[\mathbf{C}]$ égale à $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer J^2 puis J^3 . En déduire J^k $(k \in \mathbf{N})$

2) En déduire que si λ est valeur propre de J , alors $\lambda^3=1$.

3) Démontrer que J est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3[\mathbf{C}]$ et diagonaliser J .

4) Exprimer A en fonction des puissances de J .

5) En déduire que A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3[\mathbf{C}]$ et diagonaliser A .

EX 8 : Soit une matrice A de $\mathrm{M}_n[\mathbf{K}]$ possédant une unique valeur propre λ dans $\mathbf{K}$.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n[\mathbf{K}]$ si et seulement si $A=\lambda\, I_n$.

En déduire que si A est non nulle et nilpotente , elle n'est pas diagonalisable .

EX 9 : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbf{R}$ de dimension 3 . Soit $\mathbf{B}$ une base de E .

On suppose que f admet 3 valeurs propres **distinctes** λ_1 , λ_2 , λ_3 .

Soit g un endomorphisme de E tel que $fog = gof$.

a) Montrer que les vecteurs propres de f sont aussi vecteurs propres de g .

b) En déduire que g est diagonalisable .

EX 10 : Soit f un endomorphisme d’une espace vectoriel E de dimension finie .

Montrer que f est un projecteur si et seulement si f est diagonalisable et $Sp(f)\subset\{0,1\}$.

EX 11 : Montrer que toute matrice de $\mathbf{M}_n[\mathbf{C}]$ admet au moins une valeur $\lambda \in \mathbf{C}$.

EX 12 : Soit $A\in \mathbf{M}_n[\mathbf{C}]$ **.** On pose $Sp(f)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p\}$ et pour tout $i\in[[1,p]]$, $n_i=\dim(E_{\lambda_i})$.

Montrer que $tr(A)=\sum_{i=1}^{p} n_i\,\lambda_i$.

EX 13 : Soit f un endomorphisme d’une espace vectoriel E de dimension finie .

Montrer que $\underset{\substack{\lambda\in Sp(f)\\ \lambda\neq 0}}{\oplus} E_\lambda \subset \operatorname{Im} f$. En déduire que si f diagonalisable alors $\operatorname{Im} f$ et $Kerf$ sont supplémentaires.

EX 14 : Soit f un endomorphisme diagonalisable d’une espace vectoriel E de dimension finie .

On note E_{λ_1} , E_{λ_2} ,....., E_{λ_p} ses sous espaces propres et p_k le projecteur sur E_{λ_k} de direction

$E_{\lambda_1}\oplus E_{\lambda_2}\oplus .....\oplus E_{\lambda_{k-1}}\oplus E_{\lambda_{k+1}}\oplus ....\oplus E_{\lambda_p}$. Vérifier que $f=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\, p_k$.

EX 15 : Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n[\mathbf{K}]$ et f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n dont la matrice relativement à une base de E est A .

Enoncer au moins 12 propositions équivalentes à la proposition : " A EST INVERSIBLE " .