**EX 1 ******* : Soit $p$ un entier et $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{0 , 1 , ... , p \}$ .

On lui associe la fonction suivante , dite **fonction génératrice** de $X$ : $t \longrightarrow G_X(t) = \sum_{k=0}^{p} P(X = k)\, t^k$

1 ) Déterminer $G_X$ lorsque $X$ est le nombre de pile obtenus lorsque l'on lance 3 fois une pièce parfaite .

2 ) Calculer dans le cas général $G_X'(t)$ et $G_X''(t)$ . Interpréter $G_X'(1)$ .
Calculer $G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$ . Interpréter . Que vaut $G_X(1)$ ?

3 ) Soit $p_1$ et $p_2$ deux entiers et $X_1$ *et* $X_2$ deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé , indépendantes et à valeurs respectivement dans $\{ 0 , 1 , ... , p_1 \}$ et $\{ 0 , 1 , ... , p_2 \}$ .
On pose $Y = X_1 + X_2$ . Etablir que $G_Y = G_{X_1} \times G_{X_2}$ .

**EX 2***** : On lance indéfiniment une pièce truquée amenant pile avec la probabilité $p$ ( $0 < p < 1$ ) et donc face avec la probabilité $q = 1 - p$ et on s'interesse à la longueur des séries successives de pile ou de face . Par exemple si l'on obtient <u>P P P P</u> <u>F F F</u> <u>P P</u> F...... , on dit que la première série est de longueur 4 ( série de "pile ") , la seconde de longueur 3 ( série de" face ") , la troisième de longueur 2 , etc... .
On note $X_i$ la longueur de la $i^{ème}$ série .

1 ) Démontrer que : $\forall k \in \mathbf{N}^*$ , $P(X_1 = k) = p^k q + q^k p$ .
Déterminer l'espérance et la variance de $X_1$ .

2 ) Déterminer la loi du couple $(X_1 , X_2)$ et en déduire la loi marginale de $X_2$ .
( On trouve $\forall k \in \mathbf{N}^*$ , $P(X_2 = k) = p^{k-1} q^2 + q^{k-1} p^2$ )
Vérifier que l'on a bien $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k) = 1$ et déterminer l'espérance et la variance de $X_2$ .

3 ) Déterminer la covariance de $(X_1, X_2)$ .
En déduire la variance de $X_1 + X_2$ .

4 ) Les variables $X_1$ et $X_2$ sont elles indépendantes ?

5 ) Quelle est la loi de $X_3$ ? Celle de $X_4$ ? Peut on généraliser ?

**EX 3 :** Soit $n \in \mathbf{N}^*$ .
Une assiette contient $n$ spaghettis . On tire de l’assiette deux extrémités de spaghettis .
Si ces deux extrémités appartiennent à un même spaghetti , on les noue pour fabriquer un rond que l’on pose à côté de l’assiette .
Si ces deux extrémités appartiennent à deux spaghettis différents , on les noue pour fabriquer un seul spaghetti que l’on remet dans l’assiette .

1 ) Justifier qu’en réitérant $n$ fois ce procédé , on finit par vider complètement l’assiette .

2 ) On note $R_n$ le nombre de ronds obtenus après avoir complètement vider l’assiette .

a ) Quelles sont les valeurs prises par $R_n$ ? Que vaut $P(R_n = 1)$ ? Que vaut $P(R_n = n)$ ?

b ) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ , $P(R_{n+1} = k) = \dfrac{1}{2n+1} P(R_n = k-1) + \dfrac{2n}{2n+1} P(R_n = k)$

3 ) En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $E(R_{n+1}) = E(R_n) + \dfrac{1}{2n+1}$ puis que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $E(R_n) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1}$ .

4) Retrouver ce résultat avec la formule de l’espérance totale .

5) Etablir que $E(R_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} \ln n$ .