

FEUILLE D'EXERCICES

$$(\mathbf{R}_*^+)^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

EX 1 : Soit la fonction

$$(x, y) \longrightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{x+y}$$

- 1) Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que f admet des dérivées directionnelles d'ordre 1 et 2 en $A(a, 1-a)$ dans la direction $U = (1, 1)$
- 2) Montrer que f admet un extremum local sur $(\mathbf{R}_*^+)^2$
- 3) Montrer que f admet un extremum global sur $(\mathbf{R}_*^+)^2$.

- EX 2 :** 1) Déterminer les extremums éventuels de la fonction $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$
 $(x, y) \rightarrow (x^2 - y)(3x^2 - y)$.
- Peut-on conclure avec le théorème sur les conditions suffisantes d'extremum ?
- 2) Etudier le signe de la fonction $x \rightarrow f(x, \lambda x^2)$. Conclure.

EX 3 : A l'aide de l'étude du signe de la forme quadratique associée à la matrice hessienne, étudier rapidement les extremums locaux de la fonction définie sur $\mathbf{R}^3$ par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 - 3x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2$$

EX 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par
 $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x, y) = 4x^2 + 10y^2 + 4xy - 8x - 10y + 6$.

On définit les ensembles K et K_0 par

$$K = \{(x, y) \in (\mathbf{R}^+)^2 \mid x + y \leq 1\} \quad K_0 = \{(x, y) \in (\mathbf{R}^{+*})^2 \mid x + y < 1\}.$$

- 1) a) Montrer que f admet un minimum local sur $\mathbf{R}^2$ atteint en un point (x_0, y_0) que l'on déterminera.
- b) Montrer que f n'admet pas de minimum sur K_0 .
- 2) a) On pose $K_1 = \{(0, y) \mid y \in [0, 1]\}$, $K_2 = \{(x, 0) \mid x \in [0, 1]\}$, $K_3 = \{(x, 1-x) \mid x \in [0, 1]\}$
 Déterminer les minimums de f respectivement sur K_1 , K_2 et K_3 .
- b) Montrer que f admet un minimum sur K atteint en un unique point de K que l'on déterminera.
 Donner la valeur de ce minimum.

EX 5 : Montrer que la fonction $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = x^2 - 2xy + yz + y - z$ n'a pas d'extremum sur $\mathbf{R}^3$.

Déterminer les extremums de f sous les contraintes $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$

EX 6 : Etude des extremums de la fonction f définie sur $]0, +\infty[^3$ par $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ sous la contrainte $xyz = 8$

EX 7 : n est un entier supérieur ou égal à 3 et r un réel strictement supérieur à 1

On pose $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_{n-1} + \ln(nr - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1})$

et $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1} / x_1 > 1, x_2 > 1, \dots, x_{n-1} > 1, x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} < nr - 1\}$.

1) Montrer que U est un ouvert de $\mathbf{R}^{n-1}$ et que f est de classe C^2 sur U .

2) a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f .

b) Montrer que le seul point de U en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est le point $a = (r, r, \dots, r)$.

3) Déterminer la matrice hessienne M de f en a .

4) On pose $N = I + J$, où I est la matrice unité de $\mathbf{M}_{n-1}[\mathbf{R}]$ et J la matrice de $\mathbf{M}_{n-1}[\mathbf{R}]$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

a) Montrer que J est diagonalisable.

b) Utiliser une base de $\mathbf{M}_{n-1,1}[\mathbf{R}]$ formée de vecteurs propres de J pour montrer que N est diagonalisable et qu'il existe une matrice P d'inverse tP , telle que $N = PD^tP$ où D est la matrice diagonale de $\mathbf{M}_{n-1}[\mathbf{R}]$ dont les $(n-2)$ premiers éléments diagonaux sont égaux à 1, celui de la $(n-1)^{\text{ème}}$ ligne étant égal à n .

5) Vérifier que $M = -\frac{1}{r^2}N$. En déduire que f présente un maximum local au point a .

Donner la valeur de f correspondant à ce maximum.

6) On pose pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in]1, +\infty[^n$, $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \ln x_i$.

a) Montrer que h admet un seul point critique sous la contrainte $x_1 + x_2 + \dots + x_n = nr$.

b) Déterminer la matrice hessienne de h en un point $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in]1, +\infty[^n$.

c) A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégrale, montrer que h admet un maximum global sur $]1, +\infty[^n$ sous la contrainte $x_1 + x_2 + \dots + x_n = nr$.

En déduire que f présente un maximum global au point a .