FEUILLE D' EXERCICES ECS 2

EX 1 : Soients $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\1&2&1&0\\2&1&0&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}$ et $P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&1&1\\0&\sqrt{2}&-1&1\\-\sqrt{2}&0&1&1\\0&-\sqrt{2}&-1&1\end{pmatrix}$

1) Donner l'expression des formes quadratiques q_A et q_B associées à A et à B .
2) Vérifier que $A^2=4A$. En déduire les valeurs propres et les sous espaces propres de A .
3) Vérifier que P est orthogonale . Vérifier que les colonnes de P sont des vecteurs propres de B .
(on pourra calculer BP) . En déduire que $P^{-1}BP$ est diagonale .
Déterminer , **sans calcul ,** les valeurs propres et les sous espaces propres de B .
4) Montrer , **sans calcul ,** que ${}^tPAP$ est diagonale .
5) Etudier le signe des formes quadratiques q_A et q_B .

EX 2 : On munit $\mathbf{R}_n[X]$ du produit scalaire : $\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$ (déjà vu)

On pose pour $P\in\mathbf{R}_n[X]$, $f(P) = X\,P''(X)+(1-X)P'(X)$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ et déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.
2) En déduire que pour tout $k\in[\![0\ ,\ n]\!]$ il existe un unique polynôme unitaire P_k vérifiant $f(P_k)=-k\,P_k$.
3) a) Calculer la dérivée de la fonction $t\xrightarrow{\varphi} t\,P'(t)e^{-t}$.
En déduire que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbf{R}_n[X]$.
b) En déduire que la famille $(P_0,P_1,.....,P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$.

EX 3 : I) $\mathbf{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique .
1) On pose pour $u=(x_1,x_2,x_3)$, $q(u)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3$.
Montrer que q est la forme quadratique associée à une matrice A que l'on déterminera .
2) Justifier l'existence d'une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D que l'on déterminera ..
3) En déduire l'existence une matrice B symétrique réelle à valeurs propres positives telle que $B^2=A$

II) Cas général
Soit $A\in S_n[\mathbf{R}]$ et soit q la forme quadratique associée à A .
On dit que $A\in S^+{}_n[\mathbf{R}]$ si $\forall x\in\mathbf{R}^n$, $q(x)\geq 0$.

1) Soit $A\in S_n[\mathbf{R}]$. Montrer que $A\in S^+{}_n[\mathbf{R}]$ ssi toutes les valeurs propres de A sont positives

2) Soit $A\in M_n[\mathbf{R}]$. Montrer que $A\in S^+{}_n[\mathbf{R}]$ ssi il existe $B\in S_n[\mathbf{R}]$ telle que $A=B^2$.

EX 4 : $\mathbf{M}_n[\mathbf{R}]$ est muni du produit scalaire $\langle A,B\rangle = tr(A^tB)$ **.**

Montrer que l'application $A \xrightarrow{f} {}^tA$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbf{M}_n[\mathbf{R}]$.

Déterminer fof . En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

EX 5 : $\mathbf{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique .On suppose $n \geq 2$.

On note C un vecteur colonne non nul de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de composantes $c_1, c_2, ...c_n$

1) Expliciter le produit matriciel $C\,{}^tC$. La matrice $C\,{}^tC$ est-elle diagonalisable ?

2) Exprimer $(C\,{}^tC)^2$ en fonction de $C\,{}^tC$ et de la norme de C.

3) En déduire que toute valeur propre de $C\,{}^tC$ est égale à 0 ou à $\|C\|^2$

Préciser le sous-espace propre associé à 0.

4) Calculer $C\,{}^tC\,C$ en fonction de C et préciser le sous-espace propre associé à $\|C\|^2$.

En déduire que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $C\,{}^tC$ est une projection orthogonale lorsque le vecteur C est unitaire.

5) Etudier le signe de la forme quadratique associée .

EX 6 : $\mathbf{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique . On suppose $n \geq 2$. .

Soit $p \in [[1,n]]$ et $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille libre de $\mathbf{R}^n$.

Soit f l'application définie par $\forall x \in \mathbf{R}^n, f(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, u_k\rangle u_k$.

1) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E .

2) Déterminer le noyau et le rang de f , puis $\operatorname{Im} f$.

3) On suppose dans cette question que $p = n$.

a) Montrer que les valeurs propres de f sont strictement positives .

b) Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique g de $\mathbf{R}^n$ dont les valeurs propres sont strictement positives tel que $g^2 = f^{-1}$.

c) Montrer que la famille $(g(u_k))_{1\leq k\leq n}$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$.