FEUILLE D'EXERCICES ECS 2

EX 1 : Pour tout $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$ on pose $q(x)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$.

1) Donner un produit scalaire φ sur $\mathbf{R}^3$ tel que $\forall x\in\mathbf{R}^3$, $\varphi(x,x)=q(x)$.

Pour vérifier rapidement la bilinéarité , on pourra mettre $\varphi(x,y)$ sous la forme ${}^tXAY$ où A est une matrice carrée réelle symétrique d'ordre 3 et X et Y désignent les matrices colonnes de coordonnées de x et de y dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

2) Déduire du 1) que , x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 étant des réels quelconques ,

$$(2x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_1y_2+x_2y_1)^2\le(2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2)\ (2y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_1y_2)$$

EX 2 * : Trois produits scalaires classiques dans $\mathbf{R}_n[X]$.**

I) Soit $x_0,x_1,...,x_n$, $n+1$ réels distincts . On pose $L_j(X)=\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{X-x_k}{x_j-x_k}$ *pour* $0\le j\le n$

(polynômes de Lagrange)

1) Montrer que l'application $\mathbf{R}_n[X]\times\mathbf{R}_n[X]\xrightarrow{\varphi}\mathbf{R}$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

$$(P,Q)\longrightarrow\sum_{k=0}^{n}P(x_k)Q(x_k)$$

On notera alors $\varphi(P,Q)=\langle P,Q\rangle$.

2) Montrer que $(L_0,L_1,...,L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

II) Soit l'application $\mathbf{R}_n[X]\times\mathbf{R}_n[X]\xrightarrow{\varphi}\mathbf{R}$

$$(P,Q)\longrightarrow\int_{-1}^{1}P(x)Q(x)dx$$

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$. On notera alors $\varphi(P,Q)=\langle P,Q\rangle$.

2) On pose $P_k(X)=(X^2-1)^k$ et $L_k(X)=P_k^{(k)}(X)$ **(polynômes de Legendre) .**

Montrer que $(L_0,L_1,....,L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$ pour φ .

Expliquer comment on peut en déduire une base orthonormée de $\mathbf{R}_n[X]$.

III) 1) Justifier l'existence et rappeler la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx$.

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}P(t)e^{-t}dt$ pour tout $P\in\mathbf{R}[X]$.

2) Démontrer que l'application $(P,Q)\to\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-t}dt$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

On notera alors $\varphi(P,Q)=\langle P,Q\rangle$ .Déterminer $\langle X^p,X^q\rangle$ et $\|X^p\|$ où $p,q\in\mathbf{N}$.

3) Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire .

(les polynômes de cette base s'appellent **polynômes de Laguerre)**

EX 3 ***: Le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_n[\mathbf{R}]$.**

On pose pour $A=(a_{ij})\in\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$, $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

1) (Re)démontrer les propriétés :

$\forall A,B\in\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$, $\forall\lambda\in\mathbf{K}$ $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$, $tr(\lambda A)=\lambda tr(A)$, $tr(AB)=tr(BA)$.

2) Montrer que pour $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}\in\mathbf{M}_n[\mathbf{R}]$ et $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}\in\mathbf{M}_n[\mathbf{R}]$, $tr\left(A\,{}^tB\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$.

3) Démontrer que l'application $(A,B)\to tr(A\,{}^tB)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_n[\mathbf{R}]$, noté $\langle\ ,\ \rangle$.

a) Définir la norme euclidienne associée et déterminer une base orthonormée simple dans le cas n = 2.

b) Expliquer pourquoi on l'appelle le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_n[\mathbf{R}]$.

4) Justifier que pour tout $A\in\mathbf{M}_n[\mathbf{R}]$ et $B\in\mathbf{M}_n[\mathbf{R}]$, $\left\langle {}^tA,B\right\rangle=\left\langle A,{}^tB\right\rangle$

EX 4 **: $\mathbf{R}^n$** est muni de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$.

Soit A une matrice de $\mathbf{M}_n[\mathbf{R}]$. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A et g l'endomorphisme canoniquement associé à ${}^tA$.

1) Montrer que $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$,$\left\langle g(y),x\right\rangle=\left\langle y,f(x)\right\rangle$ puis $\left\langle (gof(x),x\right\rangle=\|f(x)\|^2$.

2) Montrer que $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$,$\left\langle gof(y),x\right\rangle=\left\langle y,gof(x)\right\rangle$.