FEUILLE D'EXERCICES **ECS 2**

EX 1 : Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1) $x \to e^{-x}\sin x$ 2) $x \to \ln^2(1+x)+(1+x)^7$ 3) $x \to \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1-x}}$

EX 2 : Déterminer un développement limité à l'ordre 2 **au voisinage de 1** de $\dfrac{1}{x^2}$

EX 3 : A l'aide de la formule de Taylor Young , donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 , de la fonction F définie par $x \to \int_0^x e^{-t^2}dt$.

EX 4 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{\ln(x+1)}$ ($a>0$) 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi\cos(\pi x)}{x\sin(\pi x)}-\dfrac{1}{x^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - x$

EX 5 : Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$g(t)=\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{t-1} \quad \text{si} \quad t\neq 1 \qquad \text{et} \qquad g(1)=\frac{1}{2}$$

Prouver que g est dérivablesur$\left]0;+\infty\right[$.

(on pourra s'aider pour cet exercice de développements limités en posant $t=1+h$)

EX 6 : Soit la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{e^{-x^2}-e^{-x}}{x}$.

Ecrire le développement limité de *f* au voisinage de 0 à l'ordre 2 .

En déduire que *f* admet un prolongement par continuité g en 0 qui est dérivable en 0

Etudier la position relative de la courbe de g par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 .

EX 7 : Soit la fonction $x\to\sqrt{x^2-x}$. Vérifier que $(x=\dfrac{1}{2})$ est axe de symétrie de la courbe de *f*

EX 8 : A l'aide de la convexité de fonctions convenablement choisies , justifier les inégalités (bien connues) suivantes :

1) $\forall x>-1 \quad \ln(1+x)\le x$

2) $\forall x>0 \quad \ln(x)\le x-1$

3) $\forall x\in\mathbf{R} \quad e^x\ge 1+x$

4) $\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \quad \dfrac{2}{\pi}x\le\sin x\le x$

EX 9 : 1) Etudier la convexité de la fonction $t\to t\ln t$ sur $\left]0;+\infty\right[$.

En déduire : $\forall\ x,y,a,b>0 \qquad x\ln(\frac{x}{a})+y\ln(\frac{y}{b})\ge(x+y)\ln\left[\frac{x+y}{a+b}\right]$.