

FEUILLE D'EXERCICES

EX 1 : Soit f la fonction définie par

$$f(x, y) = x^3 y^3 \cos \frac{1}{y} \text{ si } y \neq 0$$

$$f(x, y) = 0 \text{ si } y = 0$$

- 1) Montrer l'existence de dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f en tout point $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et les calculer.
- 2) Etudier l'existence de dérivées partielles d'ordre 2 en $(1, 0)$.

EX 2 : Déterminer toutes les fonctions réelles de classe C^1 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \partial_1(f)(x, y) = 0.$$

EX 3 : Déterminer les fonctions réelles de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \partial_1(f)(x, y) = 3x^2y - 2y^2 \text{ et } \partial_2(f)(x, y) = x^3 - 4xy + 6y^2.$$

EX 4 : Soit $A: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une application de classe C^2 et $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^2 telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y) + A(x, y)$$

Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f''(x+y) = \partial_{1,2}^2(A)(x, y)$

$$(\mathbf{R}_*^+)^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

EX 5 : Soit la fonction

$$(x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + \frac{1}{x+y}$$

- 1) Montrer que f est de classe C^2 sur l'ouvert et calculer ses dérivées partielles.
- 2) Ecrire la matrice hessienne de f en $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de a .
- 3) Déterminer les dérivées première et seconde directionnelle de f en a de direction $h = (1, 1)$.

EX 6 : Soit $n \geq 2$. On considère la fonction de n variables réelles, notée f , définie par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k$$

- 1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^n$. Calculer les dérivées premières et secondes de f .
- 2) Montrer que les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est un seul point a .
Vérifier que la hessienne de f en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$, où I_n désigne la matrice unité de $M_n(\mathbf{R})$ et J_n la matrice de $M_n(\mathbf{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.
- 3) Ecrire le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de a .

EX 7 : On pose $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2}q(x)$ où q est la forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ associée à une matrice $A = (a_{i,j}) \in S_n(\mathbf{R})$. Déterminer la matrice hessienne de f .