FEUILLE D'EXERCICES

EX 1 : I) $\mathbf{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $(e_1 e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que $\begin{cases} f(e_1)=(1,-3,-2) \\ f(e_2)=(1,-3,-2) \\ f(e_3)=(-1,3,2) \end{cases}$

On note A la matrice de f relativement à la base canonique $(e_1 e_2, e_3)$.

1) Quelle est l'image du triplet $(x, y z)$ par f ? Quel est le rang de A ?

2) Déterminer $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$. f est il un automorphisme de $\mathbf{R}^3$?

3) Prouver que $\operatorname{Im} f \subset Kerf$. En déduire que $fof = 0$.

II) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 .

Soit f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0 \; et \; fof = 0$.

1) Comparer $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$. Prouver que $dimKerf = 2$.

2) Prouver qu'il existe une base $(u_1, u_2 u_3)$ tel que $f(u_1)=u_2$, $u_2 \in Kerf$, $u_3 \in Kerf$.

EX 2 : Soit $\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_2[\mathbf{K}] & \xrightarrow{f} & \mathbf{M}_2[\mathbf{K}] \\ A & \longrightarrow & A - {}^tA \end{array}$

1) Prouver que f est un endomorphisme de $\mathbf{M}_2[\mathbf{K}]$.

2) Déterminer Imf et Ker$f$

3) Déterminer la matrice de f dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

et retrouver les résultats du 2) .

EX 3 : Soit la matrice $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n+1 \\ 1\le j\le n+1}}$ avec $\begin{cases} a_{ij} = i & si \;\; j=i+1 \\ a_{ij} = 0 & si \;\; j \neq i+1 \end{cases}$

1) Ecrire la matrice A .

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[\mathbf{X}]$ admettant la matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[\mathbf{X}]$.

Déterminer $f(X^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, puis $f(P)$ pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$.

3) En déduire $A^{n+1} = 0$.

EX 4 : 1) Démontrer que dans $\mathbf{M}_3[\mathbf{R}]$ $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ sont semblables .

2) Donner un argument simple qui prouve que $A = (i+j)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ et $A = (i^2)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ ne sont pas semblables .

EX 5 : Que dire des vecteurs u_1, u_2, u_3 de $\mathbf{R}^3$ dans les cas suivants :

1) $rg(u_1, u_2) = 2$ et $rg(u_1, u_2, u_3) = 2$ 2) $rg(u_1, u_2, u_3) = 3$.

EX 6 : Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E .

1) Quelle inclusion évidente y a t-il entre $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Im}(gof)$?

On suppose f est bijective . Montrer alors qu'il y a égalité , puis en déduire $rg(gof) = rg(g)$.

2) Quelle inclusion évidente y a t-il entre $Kerf$ et $Ker(gof)$?

On suppose g est bijective . Montrer alors qu'il y a égalité ,puis en déduire $rg(gof) = rg(f)$.

EX 7 : Soit $\begin{array}{l} E \xrightarrow{f} E \\ x \longrightarrow \lambda x \end{array}$ où E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ sur $\mathbf{R}$ et λ un réel donné .

1) Prouver que f est un endomorphisme de E .

2) Vérifier que $\forall x \in E, (x, f(x))$ est une famille liée . Etudier la réciproque .

(on pourra considérer la matrice de f dans une base de E)

EX 8 : Soit a , b ,c trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = k > 0$

Soit $A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

1) Exprimer les colonnes de A en fonction de U . En déduire le rang de A .

2) Calculer AU . En déduire sans calcul que A est semblable à $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

EX 9 : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$

1) Montrer qu'il existe un vecteur x n'appartenant pas à $Ker f^{n-1}$.

Montrer alors que la famille $B = (x, f(x), f^2(x), ..., f^{n-1}(x))$ est une base de E .

2) Déterminer la matrice M de l'endomorphisme f dans la base B .