FEUILLE D'EXERCICES

ECS 2

EX 1 : Calculer 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

EX 2 : Calculer A^n dans les cas suivants :

1) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ (écrire $A = aI + bJ$ et déterminer les puissances de J)

2) $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ (écrire $A = (a-b)I + bK$ et déterminer les puissances de K)

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (écrire $A = I + N$ et déterminer les puissances de N)

Prouver que A est inversible . Déterminer son inverse par 3 méthodes différentes .

EX 4 : La matrice A est elle inversible dans les cas suivants (on déterminera l'inverse éventuel) :

1) $A^3 = I$ 2) $A^3 = 0$ 3) $A^3 = A^2 + I$

EX 5 : Pour tout polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ de $\mathbf{K}[X]$ et toute matrice A de $\mathbf{M}_p[\mathbf{K}]$,
on pose $P(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_nA^n$.

1) Montrer que $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X], P(A)Q(A) = (PQ)(A)$

En déduire que $\forall (P, Q) \in (\mathbf{K}[X])^2, P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$.

Retenir : « deux polynômes en A commutent »

2) Soit $U \in \mathbf{M}_{p,1}[\mathbf{K}]$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $AU = \lambda U$. Montrer que $P(A)U = P(\lambda)U$.

3) Si P un est polynôme tel que $P(A) = 0$, on dit que P est un polynôme annulateur de A .
Montrer que si $X^2 + X + 2$ est un polynôme annulateur de A , alors A inversible .

EX 6* :** Pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, on appelle trace de A le réel $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

1) Montrer que $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ et $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$ ($\lambda \in \mathbf{K}$) .

2) Montrer que $\forall (A, B) \in (\mathbf{M}_n[\mathbf{K}])^2, tr(A \times B) = tr(B \times A)$.

Déterminer $tr(P^{-1}AP)$ pour $P \in \mathbf{GL}_n[\mathbf{K}]$.

EX 7 : Soit D une matrice diagonale d'ordre n dont tous les éléments diagonaux sont distincts deux à deux .

Démontrer que si une matrice carrée d'ordre n commute avec D , elle est elle même diagonale .