EX 1 : 1) Quel est le reste de la division de X^n par $X+1$, par $(X+1)^2$?

2) Soit A une matrice carrée vérifiant $A^3 + 3A^2 + 3A + I = 0$.

Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de I , A , A^2 .

EX 2 : Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}_7[X]$ tels que

$P(X)+1$ soit divisible par $(X-1)^4$ et $P(X)-1$ soit divisible par $(X+1)^4$.

(on s'intéressera aux racines de $P' = (P+1)' = (P-1)'$)

EX 3 : * Polynômes de Legendre**

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes à coefficients réels définie par

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n(X) = \frac{(-1)^n}{n!} [X^n (1-X)^n]^{(n)}.$$

1) Déterminer le degré de P_n et son coefficient de plus haut degré.

2) Comparer $P_n(X)$ et $P_n(1-X)$.

3) Montrer à l'aide du théorème de Rolle que P_n admet exactement n racines distinctes et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]0, 1[$.

EX 4 : ** Polynômes de Lagrange**

Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ n réels distincts. On pose pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$.

1) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $L_i(x_i)$ et $L_i(x_j)$ pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $j \neq i$.

Déterminer le degré et les racines du polynôme L_i .

2) Soit $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$. On pose $Q(X) = \sum_{i=1}^n P(x_i) L_i(X)$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $Q(x_j)$ puis montrer que $P(X) = \sum_{i=1}^n P(x_i) L_i(X)$.

En déduire que $\sum_{i=1}^n L_i = 1$.