FEUILLE D'EXERCICES **ECS 2**

EX 1 : X désigne une variable aléatoire discrète à valeurs positives .
On supposera $X(\Omega)\subset\mathbf{N}$. Pour $k\in\mathbf{N}$, on pose $p_k=P(X=k)$.

On appelle fonction génératrice associée à X , la fonction $\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{R}\xrightarrow{G_X}\mathbf{R}\\ t\longrightarrow G_X(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}p_kt^k\end{array}}$.

On notera D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X .

1) **Détermination de G_X dans des cas particuliers .**

a) Déterminer G_X dans le cas où X suit la loi uniforme sur $\{0,1,2,...,n-1\}$ ($n\in\mathbf{N}^*$) .

b) Déterminer la fonction génératrice d'une variable de Bernoulli de paramètre p.

c) Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

d) Montrer que si X suit la loi géométrique de paramètre p ,

$$D_{G_X}=]-\frac{1}{q},\frac{1}{q}[\quad \text{et} \quad \forall t\in D_{G_X} \ , G_X(t)=\frac{pt}{1-qt} \qquad \text{où } q=1-p \ .$$

e) Montrer que si X suit la loi de Poisson de paramètre λ , $D_{G_X}=\mathbf{R}$ et $\forall t\in D_{G_X}$, $G_X(t)=e^{\lambda(t-1)}$.

2) **Cas général**

a) Montrer que $[-1,1]\subset D_{G_X}$ Quelle est la valeur de $G_X(1)$?

b) Montrer que $\boxed{G_X(t)=E(t^X)}$.

c) Soit X et Y deux variables discrètes à valeurs entières positives indépendantes .
A l'aide du 2) b) , montrer que la fonction génératrice de $X+Y$ est le produit des fonctions génératrices de X et de Y.
Généraliser par récurrence ce résultat à n variables discrètes à valeurs entières positives mutuellement indépendantes

d) Retrouver alors le résultat du 1) c) à l'aide du 1)b) .

EX 2 : On considère une pièce truquée et on note et p la probabilité d'obtenir pile ($0<p<1$) .
On effectue une première série de lancers jusqu'à obtenir pour la première fois pile .
On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires .
On relance alors la pièce un nombre de fois égal au nombre de lancers effectués lors de la première série et on note X le nombre de piles obtenus au cours de cette seconde série de lancers.

1) Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $(N=n)$?

2) A l'aide de la formule de l'espérance totale, déterminer , si elle existe l'espérance de X .

3) Déterminer la loi du couple (N , X) . En déduire la loi de X .

PROBLEME

n désigne un entier naturel non nul et p un entier supérieur ou égal à 2 .

Un immeuble de p étages est équipé d'un ascenseur .

n personnes montent dans l'ascenseur au rez de chaussée .
Chaque personne choisit son étage d'arrivée au hasard , de façon équiprobable .
Le choix de chaque personne est indépendant du choix des autres passagers.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur.

Partie I

Pour $1 \le i \le p$, on note Y_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'ascenseur s'arrête au i *iéme* étage et la valeur 0 sinon.

1) a) Pour $1 \le i \le p$ et $1 \le k \le n$, quelle est la probabilité que le k *iéme* passager descende au i *iéme* étage ?

b) En déduire $P(Y_i = 0) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$ puis déterminer la loi de la variable Y_i , son espérance et sa variance .

c) Justifier que $P(X_n = 1) = \frac{1}{p^{n-1}}$

2) a) Justifier l'égalité : $X_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_p$. En déduire que $E(X_n) = p\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right)$.

b) Pour $(i, j) \in [[1, p]]^2$ tels que $i \ne j$, justifier que $P\big((Y_i = 0) \cap (Y_j = 0)\big) = \left(1 - \frac{2}{p}\right)^n$.

Déterminer alors $P\big((Y_i = 0) \cup (Y_j = 0)\big)$ puis prouver que $\text{cov}(Y_i, Y_j) = \left(1 - \frac{2}{p}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2n}$.

c) Calculer enfin $V(X_n)$.

3) On pose $R_n = p - X_n$.

a) Interpréter concrètement la variable R_n .

b) Montrer que $P(R_n \ge 1) \le E(R_n)$. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = p) = 1$.

Partie II

Pour $1 \le i \le p$, on note N_i la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de personnes descendant au $i^{\text{ième}}$ étage de l'immeuble .

1) Que vaut $N_1 + N_2 + ... + N_p$? En déduire la valeur de $E(N_i)$ pour $1 \le i \le p$.

2) En s'aidant du modèle de la loi binômiale , justifier que , pour $1 \le i \le p$, N_i suit la loi binômiale de paramètres n et $\frac{1}{p}$ et que , pour $(i, j) \in [[1, p]]^2$ tels que $i \ne j$, $N_i + N_j$ suit la loi binômiale de paramètres n et $\frac{2}{p}$.