

ETUDE LOCALE

II) NEGLIGEABILITE LOCALE

Soit f et g ne s'annulant pas sur un $V^*(a)$. Alors $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Pté : Si au $V(a)$, $f=o(h)$ et $g=o(h)$ alors $f+g=o(h)$.

Comparaison des fonctions puissances , logarithmes et exponentielles au $V(+\infty)$ et au $V(0)$.

II) ÉQUIVALENCE LOCALE

Soit f et g ne s'annulant pas sur un $V^*(a)$. Alors $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Au $V(a)$, $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(g)$

Compatibilité avec la multiplication , la division , l'élévation à la puissance α (constante réelle).



$f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ n'implique pas $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

$f \sim g$ n'implique pas $h \circ f \sim h \circ g$

Pté : Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \neq 0$, alors $f(x) \sim l$.

Au voisinage de 0 :

$\sin x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\tan x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Au voisinage de 1 : $\ln x \sim x - 1$

Application à la recherche de limites et à l'étude locale du signe d'une fonction .

III) DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Unicité . Partie régulière d'un développement limité . Somme . Produit .

Formule de Taylor Young :

Soit f de classe C^n sur un intervalle I contenant 0 .

Alors $\forall x \in I$, $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$.

$x \rightarrow \sin x$, $x \rightarrow \cos x$,

Développements limités au $V(0)$ de

$x \rightarrow \frac{1}{1+x}$, $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$, $x \rightarrow (1+x)^\alpha$, $x \rightarrow e^x$, $x \rightarrow \ln(1+x)$.

Application à la recherche d'équivalents :

Si au $V(0)$, $f(x) = a_p x^p + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ et si $a_p \neq 0$ alors $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} a_p x^p$.

IV) COMPARAISON DES SUITES

Equivalence . Négligeabilité . Développements limités en $\frac{1}{n}$.



ETUDE GLOBALE

I) PROPRIETES ALGEBRIQUES DES FONCTIONS

Parité . Périodicité . Symétries .

II) ETUDE DU SENS DE VARIATION

III) ETUDE DE LA CONVEXITE

$$f \text{ convexe sur } I \quad \text{ssi} \quad \forall x_1, x_2 \in I, \quad f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ \forall \lambda \in [0;1]$$

Généralisation de l'inégalité de convexité.
Interprétations géométriques .

Th : Soit f une fonction de classe C^2 sur I . Alors $(f \text{ convexe sur } I) \quad \text{ssi} \quad (\forall x \in I, f''(x) \geq 0)$

IV) COMPORTEMENT LOCAL D'UNE FONCTION .

Etude de la position relative de la courbe et de sa tangente en un point $M_0 (x_0, f(x_0))$:
à l'aide de l'étude de la convexité
ou
d'un développement limité de la fonction f au voisinage de x_0

Point d'inflexion d'une courbe .