PROGRAMME D'INTERROGATION . SEMAINE DU 15/9 AU 19/09/14 ECS 2

I) ESPACES VECTORIELS

Exemples fondamentaux : $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{A}(E,\mathbf{R})$, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

II) SOUS ESPACES VECTORIELS

Th : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$
F est un sous espace vectoriel de E **ssi** 1) $F \subset E$
2) $F \neq \varnothing$
3) $\forall x, y \in F$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda x + y \in F$.

III) FAMILLE GENERATRICE . FAMILLE LIBRE

Sous espace vectoriel de E engendré par une famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs de E :

$Vect(u_1, u_2, ..., u_p)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(u_1, u_2, ..., u_p)$.

Famille génératrice d'un espace vectoriel E .

Soit ($u_1, u_2, ..., u_p$) une famille de p vecteurs de E .
Si $Vect(u_1, u_2, ..., u_p) = E$, on dit que ($u_1, u_2, ..., u_p$) est une famille **génératrice** de E .
Autrement dit , ($u_1, u_2, ..., u_p$) génératrice de E ssi tout vecteur de E est c. l. de ($u_1, u_2, ..., u_p$) .

Toute surfamille d'une famille génératrice est elle même génératrice .

Th : Soit $(u_1, u_2, ..., u_{p-1}, u_p)$ une famille génératrice de E .
Alors $(u_1, u_2, ..., u_{p-1})$ est une famille génératrice de E ssi u_p est c. l. de $(u_1, u_2, ..., u_{p-1})$.

Famille libre . Famille liée .

Soit ($u_1, u_2, ..., u_p$) une famille de p vecteurs de E . Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ p scalaires de $\mathbf{K}$.
Si $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0)$ **, on dit que la famille** ($u_1, u_2, ..., u_p$) **est libre .**
Dans le cas contraire , **on dit que la famille** ($u_1, u_2, ..., u_p$) **est liée .**

- **Une famille est liée ssi l'un au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres .**
- (u) est libre ssi $u \neq 0_E$
- (u , v) liée ssi il existe $\lambda \in K$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.
- Toute sousfamille d'une famille libre est libre .
- **Dans $\mathbf{K}[X]$, toute famille de polynômes de degré distincts 2 à 2 est libre .**

Th : Soit ($u_1, u_2, ..., u_p$) une famille libre de E .
Alors $(u_1, u_2, ..., u_p, u_{p+1})$ est une famille libre de E ssi u_{p+1} n'est pas c. l. de $(u_1, u_2, ..., u_p)$.

<u>Bases d'un espace vectoriel .</u>
Une famille libre et génératrice de E est appelée base de E .

Caractérisation : La famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E
ssi $\forall x \in E$, $\exists ! \, (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{K}^n$, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$.
$(x_1, x_2, ..., x_n)$ sont les **coordonnées** du vecteur x dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

→

IV) ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Un espace vectoriel (non réduit à $\{0\}$) est dit de **dimension finie** s'il admet au moins une base .

Si E **de dimension finie ,**
toutes les bases de E **ont le même nombre d'éléments** $\boldsymbol{n}$, appelé dimension de E .

Si dim $E = n$, toute famille **libre** a **au plus** n éléments et toute famille **génératrice** a **au moins** n éléments

Si dim E **=** $\boldsymbol{n}$ **,** toute famille **libre à** $\boldsymbol{n}$ **éléments de** E est une **base** de E
et toute famille **génératrice de** E **à** $\boldsymbol{n}$ **éléments** est une **base** de E .

Théorème de la base incomplète : Soit E un espace vectoriel de dimension n .
Soit $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille **libre** de E ($p < n$) .
On peut compléter $(u_1, u_2, ..., u_p)$ par $n - p$ vecteurs de E pour former une **base** de E .

V) FAMILLE DE VECTEURS EN DIMENSION FINIE

Matrice d'une famille de vecteurs $(u_1, u_2, ..., u_p)$ dans une base $\mathbf{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de E :
Ses **colonnes** sont les matrices de **coordonnées** des vecteurs $u_1, u_2, ..., u_p$ dans la base **B .**

La famille $\mathbf{B}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ est une **base** de E ssi sa matrice P dans la base **B** est **inversible .**

P est alors la **matrice de passage de B à B′ .**

Formule de changement de base : $\boxed{X = P\ X'}$

matrice de coordonnées de x dans **B**	matrice de passage de **B à B′**	matrice de coordonnées de x dans **B′**

Remarque importante : P^{-1} est la matrice passage de **B′** à **B** .

VI) SOUS ESPACE VECTORIEL D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE

Soit F un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie .
Alors **dim** $\boldsymbol{F} \leq$ **dim** $\boldsymbol{E}$ et **si dim** $\boldsymbol{F}$ **= dim** $\boldsymbol{E}$ **, alors** $\boldsymbol{F = E}$.

Recherche de la dimension d'un sous espace engendré par une famille de vecteurs :

Vect $(u_1, u_2, ..., u_p)$ reste inchangé par les opérations du type :

$$u_i \longleftrightarrow u_j \ ; \ u_i \xleftarrow{(\alpha \neq 0)} \alpha u_i \ ; \ u_i \xleftarrow{(i \neq j)} u_i + \alpha u_j$$