PROGRAMME D'INTERROGATION . SEMAINE DU 7 AU 11/ 10/ 13 ECS 2

I) PRIMITIVES D'UNE FONCTION SUR **UN** INTERVALLE I

Toute fonction f continue sur I admet au moins une primitive F sur I

II) INTÉGRALE D'UNE FONCTION **CONTINUE** SUR $[a;b]$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Théorème fondamental de l'intégration:

Si f est continue sur I et si $a \in I$, $x \to \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a

Relation de Chasles . Linéarité . Positivité

Théorème de stricte positivité :
Si f est **continue** et **positive** sur $[a,b]$ ($a<b$) et si $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a,b]$.

Intégration d'une inégalité : Soit f une fonction continue sur I . Soit $a,b \in I$.

Si $a \le b$ et si pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \le g(t)$, alors $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$.

Valeur absolue: Soit f une fonction continue sur I . Soit $a,b \in I$.

Si $a \le b$ alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$.

III) SOMMES DE RIEMANN

Si f est **continue** sur $[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)\,dt$

IV) INTÉGRATION PAR PARTIES

Si u et v de classe C^1 sur $[a,b]$, alors $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

V) CHANGEMENT DE VARIABLE

f continue sur I . $a, b \in I$. φ C^1 sur $[\alpha,\beta]$ tel que $\varphi(\alpha)=a$ et $\varphi(\beta)=b$ $\forall t \in [\alpha,\beta]$ $\varphi(t) \in I$.

Alors $\int_a^b f(u)\,du = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \times \varphi'(t)dt$.

VI) CALCUL PRATIQUE DE PRIMITIVES

VII) ÉQUATION DIFFERENTIELLE $y' = g(x)\,y$

Les solutions de l'équation différentielle $\boxed{y' = g(x)\,y}$ sur I

sont les fonctions f de la forme $\boxed{f(x) = K\exp(G(x))}$ où K constante réelle et G primitive de g sur I .

VIII) FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRALE à l'ordre n

Soit f de classe C^{n+1} sur I . Soit $a, b \in I$.

Alors $\boxed{f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots\dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}$

Ecriture avec $\sum$: $\boxed{f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}_{\text{reste intégrale}}}$

IX)) FORMULE DE TAYLOR LAGRANGE à l'ordre n

Soit f de classe C^{n+1} sur I . Soit $a, b \in I$.

Alors il existe un réel c compris entre a et b tel que

$$\boxed{f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots\dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}$$

X) INÉGALITÉ DE TAYLOR LAGRANGE à l'ordre n

Soit f de classe C^{n+1} sur I . Soit $a, b \in I$.

Soit M un majorant de $\left| f^{(n+1)} \right|$ sur le segment d'extrémités a et b

$\left(\text{autrement dit } \forall t \in [a,b] \text{ ou } [b,a],\ \left| f^{(n+1)}(t) \right| \leq M \right)$.

Alors $\boxed{\left| f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1!} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \dots\dots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}}$

Ecriture avec $\sum$: $\boxed{\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}}$