PROGRAMME D'INTERROGATION . SEMAINE DU 29 / 09 AU 3/ 10 / 14 ECS 2

Programme de la semaine précédente : APPLICATIONS LINÉAIRES

LIMITES CONTINUITÉ

I) LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Voisinages d'un réel . Limite de f en x_0 . Généralisations .

II) LES THEOREMES DE COMPARAISON

1) **Comparaison :**

> Supposons $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l'$.
> Si $l<l'$, il existe un $V(a)$ sur lequel $f(x)<g(x)$

2) **Passage à la limite :**

> Supposons $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l'$
> Si dans un $V(a)$ $f(x)<g(x)$ **,** alors $l\leq l'$

3) **Th d'encadrement :**

> Si dans un $V(a)$, $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ et si g et h ont même limite l en a, alors f a pour limite l en a .

III) OPÉRATION SUR LES LIMITES

IV) CONTINUITÉ EN UN POINT . PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

V) CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle .

Th des valeurs intermédiaires :

> Si f est continue sur $[a\,;b]$, elle prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

Théorème :

> Toute fonction continue sur $[a\,;b]$ est bornée sur $[a\,;b]$ et atteint ses bornes .

VI) FONCTIONS MONOTONES

> **Th :** Si f est croissante et majorée sur $]a\,;b[$, f admet une limite finie à gauche en b .

Variantes du théorème ...

Toute fonction **monotone** sur un intervalle I admet **une limite à droite et une limite à gauche** en tout point **intérieur** x_0 à I .

> **Th de la bijection :**
>
> Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle I .
> Alors 1) f est une bijection de I sur $f(I)$ qui est un intervalle .
> 2) f^{-1}est une bijection de $f(I)$ sur I , continue et strictement monotone de même sens que f .

SUITES

I) SUITES RÉELLES Suites monotones . Suites bornées . Suites extraites .

II) CONVERGENCE D'UNE SUITE RÉELLE

Toute suite convergente est bornée . Divergence de $1^{ère}$ et $2^{ème}$ espèce . Théorèmes de comparaison .
Passage à la limite . Théorème d'encadrement .

III) EXEMPLES FONDAMENTAUX : $(n^{\alpha})_{n\geq 1}$ $(a^{n})_{n\geq 0}$ $(n!)_{n\geq 0}$

Comparaison .

IV) SUITES MONOTONES .

Toute suite croissante et majorée est convergente . Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

Suites adjacentes . Propriétés .

V) SUITES RÉCURRENTES RÉELLES

u_0 donné . $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Th : Si (u_n) converge vers l et si f est **continue** en l , alors $f(l) = l$

DÉRIVATION

I) DÉRIVATION EN UN POINT

Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 . Tangente en un point .

II) DÉRIVATION SUR UN INTERVALLE

Opérations . Dérivée d'une fonction composée . Dérivée d'une fonction réciproque .
Etude de la fonction arctan

III) DÉRIVEES SUCCESSIVES

Fonction de classe C^p , de classe C^{∞} .
Derivées successives de $x \to x^n$, $x \to \sin x$, $x \to \cos x$, $x \to e^x$, $x \to x^{\alpha}$ $(\alpha \notin \mathbf{N})$.
Exemples de fonctions de classe C^{∞}. Dérivée $n^{ième}$ d'une somme , d'un produit . **Formule de Leibniz .**

IV) THÉORÈME DE ROLLE

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe au moins un point c de $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

V) THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe au moins un point c de $]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c)$.

Inégalités des accroissements finis : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .
Si $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq K$, alors pour tout $(a,b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leq K|b-a|$