

## Programme de la semaine précédente : APPLICATIONS LINÉAIRES

## LIMITES CONTINUITÉ

## I) LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

Voisinages d'un réel . Limite de  $f$  en  $x_0$  . Généralisations .

## II) LES THEOREMES DE COMPARAISON

1) Comparaison :

Supposons  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$  .  
Si  $l < l'$  , il existe un  $V(a)$  sur lequel  $f(x) < g(x)$

2) Passage à la limite :

Supposons  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$   
Si dans un  $V(a)$   $f(x) < g(x)$  , alors  $l \leq l'$

3) Th d'encadrement :

Si dans un  $V(a)$  ,  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si  $g$  et  $h$  ont même limite  $l$  en  $a$  ,  
alors  $f$  a pour limite  $l$  en  $a$  .

## III) OPÉRATION SUR LES LIMITES

## IV) CONTINUITÉ EN UN POINT . PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

## V) CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle .

Th des valeurs intermédiaires :

Si  $f$  est continue sur  $[a ; b]$  , elle prend au moins une fois  
toute valeur comprise entre  $f(a)$  et  $f(b)$  .

**Théorème** :

Toute fonction continue sur  $[a ; b]$  est bornée sur  $[a ; b]$  et atteint ses bornes .

## VI) FONCTIONS MONOTONES

**Th** : Si  $f$  est croissante et majorée sur  $]a ; b[$  ,  $f$  admet une limite finie à gauche en  $b$  .

Variantes du théorème ...

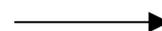
Toute fonction **monotone** sur un intervalle  $I$  admet **une limite à droite et une limite à gauche** en tout point **intérieur**  $x_0$  à  $I$  .

Th de la bijection :

Soit  $f$  une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle  $I$  .

Alors 1)  $f$  est une bijection de  $I$  sur  $f(I)$  qui est un intervalle .

2)  $f^{-1}$  est une bijection de  $f(I)$  sur  $I$  , continue et strictement monotone de même sens que  $f$  .



## SUITES

I) SUITES RÉELLES Suites monotones . Suites bornées . Suites extraites .

II) CONVERGENCE D'UNE SUITE RÉELLE

Toute suite convergente est bornée . Divergence de 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> espèce . Théorèmes de comparaison .  
Passage à la limite . Théorème d'encadrement .

III) EXEMPLES FONDAMENTAUX :  $(n^\alpha)_{n \geq 1}$   $(a^n)_{n \geq 0}$   $(n!)_{n \geq 0}$

Comparaison .

IV) SUITES MONOTONES .

Toute suite croissante et majorée est convergente . Toute suite croissante et non majorée tend vers  $+\infty$  .  
Toute suite décroissante et minorée est convergente . Toute suite décroissante et non minorée tend vers  $-\infty$  .

Suites adjacentes . Propriétés .

V) SUITES RÉCURRENTES RÉELLES

$u_0$  donné .  $\forall n \in \mathbf{N}$  ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  .

Th : Si  $(u_n)$  converge vers  $l$  et si  $f$  est **continue** en  $l$  , alors  $f(l) = l$

## DÉRIVATION

I) DÉRIVATION EN UN POINT

Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  , alors  $f$  est continue en  $x_0$  . Tangente en un point .

II) DÉRIVATION SUR UN INTERVALLE

Opérations . Dérivée d'une fonction composée . Dérivée d'une fonction réciproque .  
Etude de la fonction arctan

III) DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Fonction de classe  $C^p$  , de classe  $C^\infty$  .

Dérivées successives de  $x \rightarrow x^n$  ,  $x \rightarrow \sin x$  ,  $x \rightarrow \cos x$  ,  $x \rightarrow e^x$  ,  $x \rightarrow x^\alpha$  ( $\alpha \notin \mathbf{N}$ ) .

Exemples de fonctions de classe  $C^\infty$  . Dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'une somme , d'un produit . **Formule de Leibniz** .

IV) THÉORÈME DE ROLLE

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  , dérivable sur  $]a, b[$  et telle que  $f(a) = f(b)$  .  
Alors il existe au moins un point  $c$  de  $]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$

V) THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  , dérivable sur  $]a, b[$  .  
Alors il existe au moins un point  $c$  de  $]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$  .

**Inégalités des accroissements finis** : Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  .

Si  $\forall x \in I$  ,  $|f'(x)| \leq K$  , alors pour tout  $(a, b) \in I^2$  ,  $|f(b) - f(a)| \leq K |b - a|$