

REVISIONS : Nombres complexes .

Suites arithméticogéométriques . Suites réelles récurrentes linéaires d'ordre 2 .

Injections , surjections , bijections .

Matrices .

POLYNÔMES

K désigne R ou C

I) POLYNÔMES SUR K A UNE INDETERMINEE X

Degré d'un polynôme . Par convention $\deg(0) = -\infty$. $PQ=0 \Leftrightarrow P=0$ ou $Q=0$.

On confondra polynôme et fonction polynôme : $P = Q \Leftrightarrow \forall x \in K \quad P(x) = Q(x)$.

II) DIVISION EUCLIDIENNE DES POLYNÔMES

Théorème de la division des polynômes suivant les puissances décroissantes :

Si $B \neq 0_{K[X]}$, existence et unicité de $Q \in K[X]$ et $R \in K[X]$ vérifiant :

$$\boxed{A = BQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(B)} .$$

Diviseurs d'un polynôme . Polynômes irréductibles sur K .

III) DERIVATION DANS $K[X]$

Pour $n \geq 1$, si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ alors $P' = \sum_{k=1}^n a_k k X^{k-1}$. Si $\deg(P) = 0$, alors $P' = 0$.

Opérations . Dérivations successives

Si $k < n$	$(X^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1) X^{n-k}$
Si $k = n$	$(X^n)^{(n)} = n!$
Si $k > n$	$(X^n)^{(k)} = 0$

Si $\deg(P) = n$ et $k \leq n$ alors $\deg(P^{(k)}) = n - k$. Si $\deg(P) = n$ et $k > n$ alors $P^{(k)} = 0$.

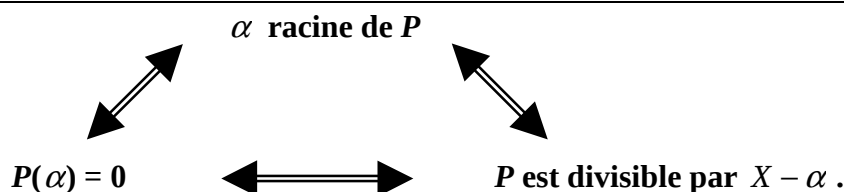
Formule de Leibniz

$$(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

Formule de Taylor : Si $d^o P \leq n$, $P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(X - \alpha)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n$

IV) RACINES D'UN POLYNÔME

Soit $\alpha \in \mathbf{K}$.



Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ racines distinctes de P , alors $\exists Q \in \mathbf{K}[X]$, $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_p)Q(X)$

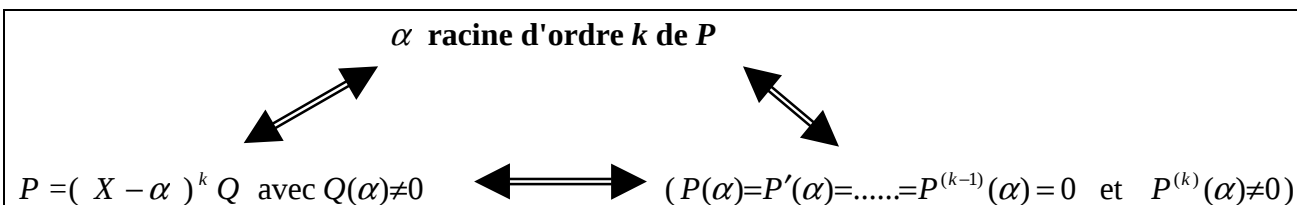
Si un polynôme non nul est de degré n , il admet **au plus** n racines distinctes.

Autrement dit, si $P \in \mathbf{K}_n[X]$ et si P s'annule $n + 1$ fois, alors P est le polynôme nul.

V) ORDRE D'UNE RACINE

$k = \max \{ i \in \mathbf{N}^* / (X - \alpha)^i \mid P \}$ est l'**ordre de multiplicité** de la racine α du polynôme non nul P .

Autrement dit, P est divisible par $(X - \alpha)^k$ mais P n'est pas divisible par $(X - \alpha)^{k+1}$.



Rem : • (α racine d'ordre au moins k de P) $\Leftrightarrow$ ($P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$)

• (α racine d'ordre k de P) $\Leftrightarrow$ (α racine de P et α racine d'ordre $k - 1$ de P')

VI) FACTORISATION DANS $\mathbf{C}[X]$

Th de D'Alembert : Tout polynôme P de $\mathbf{C}[X]$ de degré n admet n racines (confondues ou non)

Tout polynôme $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ de $\mathbf{C}[X]$ s'écrit : $P = a_n (X - \alpha_1)^{k_1} (X - \alpha_2)^{k_2} \dots (X - \alpha_p)^{k_p}$
où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont les p racines de P d'ordre $k_1, k_2, \dots, k_p$. (on a $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$)

VII) FACTORISATION DANS $\mathbf{R}[X]$

Les racines d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées 2 à 2.

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Si α est une racine d'ordre k de P , $\bar{\alpha}$ est une racine d'ordre k de P .

Exemples de factorisation dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.