PROGRAMME D'INTERROGATION . SEMAINE DU 12/01 AU 16 /01/15 ESC2

I) PRODUIT SCALAIRE

Forme bilinéaire sur un espace vectoriel E . Produit scalaire . Norme associée .
Inégalité de Cauchy Schwarz . Inégalité triangulaire .

II) ORTHOGONALITÉ

Théorème de Pythagore . Famille orthogonale . Famille orthonormale .

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre .

III) ESPACES EUCLIDIENS

Bases orthonormée . Expression du produit scalaire dans une base orthonormée .

Si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E , alors $\boxed{\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i}$.

Changement de base orthonormée . Matrice de passage .

Matrice orthogonale : Soit $P \in \mathbf{M}_n[\mathbf{R}]$. $\boxed{P \text{ est orthogonale si } P \text{ est inversible et } P^{-1} = {}^tP}$

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt .

IV) SUPPLÉMENTAIRE ORTHOGONAL

On se place dans un **espace euclidien** E **.**

$E = F \oplus F^{\perp}$. $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Pté utile : Si $F = Vect\ (u_1, u_2, ..., u_p)$, alors $\boxed{x \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!] \quad x \perp u_i}$

V) PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN SOUS ESPACE *F*

Soit p_F la **projection orthogonale** sur ***F*** .

$E = F \oplus F^{\perp}$

$\forall x \in E$, $\exists!\ x' \in F$, $\exists!\ x'' \in F^{\perp}$ $\quad x = x' + x''$.

$$\begin{array}{l} E \xrightarrow{p_F} E \\ x \longrightarrow p_F(x) \end{array}$$

Th 1 : $\boxed{y = p_F(x) \Leftrightarrow y \in F \text{ et } x - y \in F^{\perp}}$

Th 2 : Soit $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une **base orthonormée** de ***F*** . Alors $\boxed{\forall x \in E, \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i \rangle u_i}$

Conséquence : Si **B** est une base orthonormée de E et si $U_1, U_2, ..., U_p$ sont les matrices de coordonnées dans la base **B** des vecteurs d'une **base orthonormée** $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de ***F*** alors $\underset{\mathbf{B}}{mat}(p_F) = \sum_{i=1}^{p} U_i\ {}^tU_i$

Th 3 : $\boxed{y = p_F(x) \Leftrightarrow y \in F \text{ et } \|x - y\| = \min_{z \in F} \|x - z\|}$

Caractérisation par minimisation de la norme.

Soit $x \in E$. Soit F un sous espace vectoriel de E . Soit p_F la projection orthogonale sur F .

$$\boxed{\|x - z\| \text{, où } z \text{ décrit } F \text{, est minimale pour } z = p_F(x)}$$