PROGRAMME D'INTERROGATION . SEMAINE DU 26/1 AU 31/1/15 ECS 2

MEME PROGRAMME QUE LA SEMAINE PRECEDENTE

On se place dans un **espace euclidien** E .

I) PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN SOUS ESPACE VECTORIEL F DE E

Soit p_F la projection orthogonale sur F .

$E = F \oplus F^{\perp}$

$\forall x \in E$, $\exists!\ x' \in F$, $\exists!\ x'' \in F^{\perp}$ $\quad x = x' + x''$.

$$\boxed{\begin{array}{l} E \xrightarrow{p_F} E \\ x \longrightarrow p_F(x) \end{array}}$$

Th 1 : $\boxed{y = p_F(x) \Leftrightarrow y \in F \text{ et } x - y \in F^{\perp}}$

Th 2 : Soit $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une **base orthonormée** de $\boldsymbol{F}$. Alors $\boxed{\forall x \in E\ ,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i \rangle u_i}$

Conséquence : Si $\mathbf{B}$ est une base orthonormée de E et si $U_1, U_2, ..., U_p$ sont les matrices de coordonnées dans la base $\mathbf{B}$ des vecteurs d'une **base orthonormée** $(u_1, u_2, ..., u_p)$ **de** $\boldsymbol{F}$ alors $\boxed{\underset{\mathbf{B}}{mat}(p_F) = \sum_{i=1}^{p} U_i\, {}^tU_i}$

Th 3 : $\boxed{y = p_F(x) \Leftrightarrow y \in F \text{ et } \|x - y\| = \min_{z \in F} \|x - z\|}$

Caractérisation par minimisation de la norme.

Soit $x \in E$. Soit F un sous espace vectoriel de E . Soit p_F la projection orthogonale sur F .

$\boxed{\|x - z\| \text{, où } z \text{ décrit } F \text{, est minimale pour } z = p_F(x)}$

II) ENDOMORPHISMES SYMETRIQUES

Def : Soit $f \in \mathbf{L}(E)$. $\boxed{f \text{ est symétrique ssi } \forall x, y \in E\ ,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle}$.

Th : f est symétrique ssi la matrice de f dans une <u>base orthonormée</u> de E est symétrique réelle .

Exemple : **projection orthogonale**

Soit p un projecteur de E .
p est une projection orthogonale ssi p est symétrique .

Ptés :
- les sous espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux deux à deux .
- les sous espaces propres d' une matrice symétrique réelle sont orthogonaux deux à deux . ($\mathbf{R}^n$ étant muni du produit scalaire canonique)

- Soit f un endomorphisme symétrique de E et F un sous espace vectoriel de E .
  Si F est stable par f , alors $F^{\perp}$ est stable par f .

Théorème Spectral :

Si f est un endomorphisme symétrique de E alors
- f est diagonalisable .
- il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f .

Version matricielle du théorème spectral :

Toute matrice **symétrique réelle** d'ordre n est diagonalisable avec une matrice de changement de base orthogonale :

$$\boxed{\forall A \in \mathbf{S}_n[\mathbf{R}] \,,\ \exists P \in \mathbf{GL}_n[\mathbf{R}] \text{ vérifiant } P^{-1} = {}^tP \,,\ \text{telle que } P^{-1}AP = {}^tPAP = D \text{ diagonale réelle .}}$$

Les colonnes de P sont obtenues en concaténant les bases orthonormées des sous espaces propres de A ($\mathbf{R}^n$ identifié à $\mathbf{M}_{n,1}[\mathbf{R}]$ étant muni du produit scalaire canonique)

III) FORMES QUADRATIQUES

$\mathbf{R}^n$ identifié à $\mathbf{M}_{n,1}[\mathbf{R}]$ est muni du produit scalaire canonique .

Forme quadratique q sur $\mathbf{R}^n$ associée à une matrice symétrique réelle A :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}^n \,,\quad q(x) = {}^tXAX}$$

Expressions générales de $q(x)$:

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in \mathbf{S}_n(\mathbf{R})$, $\boxed{q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j}$ et aussi $\boxed{q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j}$

Savoir trouver l’expression de $q(x)$ dans une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A

Application à l’étude du signe de $q(x)$ à l’aide du signe des valeurs propres .