PROGRAMME D'INTERROGATION . SEMAINE DU 3 /11 AU 7 / 11/ 14 ECS2

I) SÉRIES NUMERIQUES

Notation : $\sum u_n$. **Somme partielle** : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

La série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite (S_n) est convergente . On note dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes .

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes , **alors** $\sum (u_n + v_n)$ et $\sum \lambda u_n$ sont convergentes .

Si la série $\sum u_n$ est convergente , **alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. (la réciproque est fausse…)

II) SÉRIES A TERMES POSITIFS

Th : Soit $\sum u_n$ une série à termes **positifs** .

Alors (S_n) est convergente ssi (S_n) est majorée . Dans ce cas $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \le \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Critère de comparaison :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes **positifs** telles que $u_n \le v_n$ à partir d'un certain rang ,

alors ($\sum v_n$ cv $\Rightarrow$ $\sum u_n$ cv) et ($\sum u_n$ div $\Rightarrow$ $\sum v_n$ div) .

Critère de négligeabilité :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries telles que $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ est à termes **positifs**,

alors ($\sum v_n$ cv $\Rightarrow$ $\sum u_n$ cv) et ($\sum u_n$ div $\Rightarrow$ $\sum v_n$ div) .

Critère d'équivalence :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à termes **positifs** telles que $u_n \sim v_n$,

alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature .

III) SÉRIES ABSOLUMENT CONVERGENTES

Théorème : Toute série absolument convergente est convergente .

IV) EXEMPLES FONDAMENTAUX

Séries géométriques :

$\boxed{\sum x^n \text{ cv ssi } -1<x<1}$ et dans ce cas $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$.

Séries dérivées des séries géométriques :

$\boxed{\sum_{n\geq 1} n x^{n-1} \text{ cv ssi } -1<x<1}$ et dans ce cas $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$.

$\boxed{\sum_{n\geq 2} n(n-1) x^{n-2} \text{ cv ssi } -1<x<1}$ et dans ce cas $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}}$.

Série exponentielle : $\boxed{\sum \frac{x^n}{n!} \text{ cv pour tout } x \text{ réel}}$ et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$.

Séries de Riemann : $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ cv ssi } \alpha > 1}$.