PROGRAMME D'INTERROGATION . SEMAINE DU 02/2 AU 06 /2/15 ECS 2

I) VARIABLES ALEATOIRES RÉELLES À DENSITÉ

Soit X une V A R de fonction de répartition F .

On dit que X est une **VAR à densité** si

1) F est continue sur $\mathbf{R}$.

2) F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points $\{a_1, a_2 ..., a_n\}$.

Toute fonction f positive , vérifiant $\boxed{\forall x \in \mathbf{R} - \{a_1, a_2, ..., a_n\}\ ,\ f(x) = F'(x)}$, est une **densité** de X .

II) CARACTÉRISATION D'UNE DENSITÉ DE PROBABILITÉ

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}$.

f est une **densité** d'une VAR X **ssi** 1) f positive .

2) f continue sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en un nb fini de pts .

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

La fonction de répartition F de la VAR X vérifie alors : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}\ ,\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt}$

III) PROPRIÉTÉS D'UNE VAR À DENSITÉ

$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ \ P(X = x) = 0}$

$\boxed{P(X \leq x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(x)}$

$\boxed{P(X \geq x) = P(X > x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)dt = 1 - F(x)}$

$\boxed{P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt}$

Calcul de fonctions de répartition et de densités de fonctions d'une variable aléatoire à densité.

Si X et Y sont deux variables **indépendantes** de densités respectives f et g ,

alors $X + Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$\boxed{h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\,g(u)\,du} \ .$$

dans le cas où h est définie sur $\mathbf{R}$ et continue sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement un nombre fini de points .

h est appelée **produit de convolution** de f et de g

IV) ESPÉRANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE DE DENSITÉ f

Si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ est **absolument convergente** ,

le nombre $\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}$ est appelé **espérance de *X* .**

Théorème du transfert

Si X est une VAR à densité f et si φ est continue sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$, privé éventuellement d'un nombre fini de points , alors

$\varphi(X)$ admet une espérance **ssi** $\int_I \varphi(x) f(x)dx$ est **absolument convergente** .

Dans ce cas $\boxed{E[\varphi(X)] = \int_I \varphi(x) f(x)dx}$

Si $E(X)$ existe , $E(aX+b)$ existe et $\boxed{E(aX+b) = aE(X)+b}$.

Linéarité , positivité , croissance de l'espérance , existence de l'espérance par domination ,
Espérance du produit de deux VAR indépendantes .

V) VARIANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE DE DENSITÉ f

$\boxed{V(X) = E\left[[X-E(X)]^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} [x-E(X)]^2 f(x)\,dx}$ (sous réserve d'existence).

$\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad . \quad V(aX+b) = a^2V(X)}$ (sous réserve d'existence).

Variance d'une somme de deux VAR indépendantes .