PROGRAMME D'INTERROGATION . SEMAINE DU 15/12 AU 19/ 12/ 14 ECS 2

I) VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

$\Omega \xrightarrow{X} \mathbf{R}$. $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$ fini ou dénombrable . Loi de probabilité : $\boxed{\begin{array}{l} X(\Omega) \longrightarrow [0;1] \\ x_i \longrightarrow p_i = P(X = x_i) \end{array}}$

$(X = x_i)_{i\in I}$ est le système complet associé à X . $\boxed{\sum_{i\in I} p_i = 1}$

Fonction de répartition : $\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$. $\boxed{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)}$

$\boxed{P[\varphi(X) = y] = \sum_{\substack{x \text{ tel que} \\ \varphi(x)=y}} P(X = x).}$ $\boxed{P(X+Y = z) = \sum_{\substack{x,y \text{ tel que} \\ x+y=z}} P[(X = x)\cap(Y = y)].}$ $\boxed{P(XY = z) = \sum_{\substack{x,y \text{ tel que} \\ xy=z}} P[(X = x)\cap(Y = y)]}$

II) LOI D'UN COUPLE . LOI D'UN VECTEUR ALÉATOIRE

Loi conjointe : $\boxed{\begin{array}{l} X(\Omega)\times Y(\Omega) \longrightarrow [0,1] \\ (x_i, y_j) \longrightarrow p_{ij} = P[(X = x_i)\cap(Y = y_j)] \end{array}}$

Lois marginales . Loi conditionnelle de *X* sachant *Y* .

III) INDÉPENDANCE

X et Y indépendantes ssi $\forall x \in X(\Omega)$, $\forall y \in Y(\Omega)$, $P[(X = x)\cap(Y = y)] = P(X = x)\times P(Y = y)$

Lemme des coalitions : Si $X_1, ..., X_p, ..., X_n$ sont indépendantes (mutuellement) , alors toute VAR fonction de $X_1, ..., X_p$ est indépendante de toute VAR fonction de $X_{p+1}, ..., X_n$.

IV) ESPÉRANCE D'UNE V.A.R. DISCRÈTE

$X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in I}$. Si I est fini , $\boxed{E(X) = \sum_{i\in I} x_i \, P(X = x_i)}$

valeur prise **probabilité qu'elle soit prise**

Si I est infini , X admet une espérance ssi $\sum x_n P(X = x_n)$ est abs cv . Alors $\boxed{E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \, P(X = x_n)}$.

Théorème du tranfert

$\boxed{E[\varphi(X)] = \sum_{i\in I} \varphi(x_i) P(X = x_i)}$ sous réserve de l'absolue convergence de la série

$\boxed{E(X+Y) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} (x_i + y_j) P[(X = x_i)\cap(Y = y_j)]}$. $\boxed{E(XY) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} (x_i y_j) P[(X = x_i)\cap(Y = y_j)]}$

Linéarité de l'espérance: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$. $E(\lambda X) = \lambda E(X)$. $E(aX+b) = aE(X) + b$

Croissance de l'espérance . Existence de l'espérance par domination .

Si X et Y **indépendantes** , **alors** $E(XY) = E(X)\,E(Y)$.

Espérance conditionnelle :

$E\left(X \mid A\right) = \sum_{i\in I} x_i\, P_A(X = x_i)$ sous réserve de l'absolue convergence de la série .

Formule de l'espérance totale :

Si $\left(A_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est un système **complet** d'événements de probabilités non nulles , $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\; E(X \mid A_n)$

(sous réserve de l'absolue convergence de la série $\sum_{i,n} x_i\, P_{A_n}(X = x_i).P(A_n)$)

V) VARIANCE . COVARIANCE

Variance de X : $V(X) = E\left[\,(X - E(X))^2\right]$. Ecart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Covariance : $\mathrm{cov}(X,Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right]$

Théorème de Koenig-Huyghens : $\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$. $\boldsymbol{cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)}$

$V(aX+b) = a^2 V(X)$. $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y)$. $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$

Si X , Y **indépendantes** , **alors** $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Si $X_1, X_2 ... X_n$ **indépendantes , alors** $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$

Bilinéarité , symétrie de la covariance . $cov(X,X) = V(X) \ge 0$

Si X ,Y **indépendantes** , **alors** $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$

VI) COEFFICIENT DE CORRÉLATION LINÉAIRE

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Pté : $-1 \le \rho_{X,Y} \le 1$

VARIABLES DISCRÈTES USUELLES

EXPERIENCE AVEC n ISSUES ÉQUIPROBABLES . X numéro de l'issue obtenue

X suit une **LOI UNIFORME** : $\boxed{P(X=k)=\frac{1}{n}}$

RÉPÉTITION D' EXPÉRIENCES INDÉPENDANTES À DEUX ISSUES S ET E DE PROBABILITÉS p ET $q=1-p$.

1) Expérience répétée une fois . X nombre de succès obtenus

X suit une **LOI DE BERNOULLI B(p)**

$X(\Omega)=\{0,1\}$. $P(X=1)=p$; $P(X=0)=q$

$E(X)=p$. $V(X)=pq$

(X **variable indicatrice** de **S**)

2) Expériences répétées n fois . X nombre de succès obtenus

X suit une **LOI BINOMIALE B(n , p)**

$X(\Omega)=\{0,1,...,n\}$. $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\ q^{n-k}$.

$E(X)=np$. $V(X)=npq$

X est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes $X_1, X_2, ..., X_n$ de paramétre p.

Th : Si X_1 suit $\mathbf{B}(n_1,p)$ et si X_2 suit $\mathbf{B}(n_2,p)$ et si X_1 et X_2 sont INDEPENDANTES, alors X_1+X_2 suit $\mathbf{B}(n_1+n_2,p)$.

3) Expériences répétées indéfiniment . X rang d'apparition du premier succès

X suit une **LOI GEOMETRIQUE G(p)**

$X(\Omega)=\mathbf{N}^*$ $P(X=k)=q^{k-1}\times p$

$E(X)=\frac{1}{p}$ $V(X)=\frac{q}{p^2}$

4) Expériences répétées un grand nombre n de fois avec p proche de 0 $(n\times p=\lambda)$ **.**
X nombre de succès obtenus

X suit une **LOI DE POISSON P(λ)**

$X(\Omega)=\mathbf{N}$ $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\times\lambda^k}{k!}$ $(\lambda>0)$

$E(X)=\lambda$ $V(X)=\lambda$

Th : Si X_1 suit $\mathbf{P}(\lambda_1)$ et si X_2 suit $\mathbf{P}(\lambda_2)$ et si X_1 et X_2 sont INDEPENDANTES , alors X_1+X_2 suit $\mathbf{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.