PROGRAMME D'INTERROGATION . SEMAINE DU 16/2 AU 20/ 2/15 ECS 2

I)CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

INEGALITÉ de MARKOV .

Soit X une V A R **positive** admettant une espérance $E(X)$. Alors $\boxed{\forall a>0 \ , \ P[X \geq a] \ \leq \dfrac{E(X)}{a}}$.

Corollaire:

Soit X une V A R admettant un moment d'ordre $r \in \mathbf{N}^*$. Alors $\boxed{\forall \varepsilon>0 \ , \ P\left[|X| \geq \varepsilon\right] \ \leq \dfrac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}}$.

INEGALITÉ DE BIENAYMÉ – TCHEBYCHEV .

Soit X une V A R admettant un moment d'ordre 2 . Alors $\boxed{\forall \varepsilon>0 \ , \ P\left[|X - E(X)| \geq \varepsilon\right] \ \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}}$

CONVERGENCE EN PROBABILITÉ .

Soit (X_n) une suite de V A R sur $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ et X une VAR sur $(\Omega, \mathbf{A}, P)$.

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ **converge en probabilité** vers X si $\boxed{\forall \varepsilon>0 \ , \ \lim\limits_{n\to+\infty} P\left[|X_n - X| \geq \varepsilon\right] \ =0}$.

Notation : $X_n \xrightarrow{P} X$ **.**

Soit (X_n) une suite de V A R sur $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ et X une VAR sur $(\Omega, \mathbf{A}, P)$.

Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$,

Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ **converge en probabilité** vers X alors $(f(X_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ **converge en probabilité** vers $f(X)$

LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES .

Soit (X_n) une suite de V A R indépendantes , de même espérance m et de même variance σ^2.

Posons $\overline{X}_n = \dfrac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$. Alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à m ,

autrement dit $\forall \varepsilon>0 \ , \ \lim\limits_{n\to+\infty} P\left[\left|\overline{X}_n - m\right| \geq \varepsilon\right] \ =0$

II) CONVERGENCE EN LOI

Soit (X_n) une suite de V A R sur $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ et X une VAR sur $(\Omega, \mathbf{A}, P)$.

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ **converge en loi** vers X si en tout point x où F_X est continue ,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)}$$

Notation : $X_n \xrightarrow{L} X$ **.**

Cas des VAR **discrètes** à valeurs dans $\mathbf{Z}$.

$(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ **converge en loi** vers X ssi $\boxed{\forall k\in\mathbf{Z}\ ,\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X=k)}$

Soit (X_n) une suite de V A R sur $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ et X une VAR sur $(\Omega, \mathbf{A}, P)$.

Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$,

Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ **converge en loi** vers X alors $(f(X_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ **converge en loi** vers $f(X)$

Théorème de Slutsky :

Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de VAR sur $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ qui converge en loi vers une VAR X et si $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de VAR sur $(\Omega, \mathbf{A}, P)$ qui converge en probabilité vers une variable constante égale à c, alors $(X_n+Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers $X+c$ et $(X_nY_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers cX .

THEORÈME LIMITE DE LA CENTRÉE ou THEORÈME LIMITE CENTRAL

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de V A R **indépendantes** , toutes **de même loi** , d'espérance m et de variance σ^2.

Posons $\overline{X_n} = \dfrac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$ et $\overline{X_n}^* = \dfrac{\overline{X_n}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Alors $(S_n^*)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une VAR X^* de loi $\mathbf{N}(0,1)$.

Autre version avec $S_n = X_1+X_2+...+X_n$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$.

On a donc pour tout couple (a,b) tel que $-\infty \le a \le b \le +\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(a \le \overline{X_n}^* \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

III) APPROXIMATIONS

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\mathbf{B}(n,p) \arrow[rr, dash, "{np\le 15\ ,\ n\ge 30\ ,\ p\le 0{,}1}"] \arrow[d, dash, "{n\ge 30 \atop p\approx 0{,}5}"] & & \mathbf{P}(\lambda) \text{ avec } \lambda = np \arrow[d, dash, "\lambda\ge 15"] \\
\mathbf{N}(m,\sigma^2) & & \mathbf{N}(m,\sigma^2)
\end{tikzcd}$$

avec $m = np$, $\sigma^2 = npq$ avec $m=\lambda$, $\sigma^2 = \lambda$

IV) ESTIMATION

θ paramètre **inconnu** de la loi d'une VAR X . On cherche à **estimer** θ .

On considère un ***n*-échantillon** $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de VAR **indépendantes** et **de même loi que *X*** .

Un **estimateur** de θ est une VAR T_n , **fonction de** $X_1, X_2, \dots, X_n$: $\boxed{T_n = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n)}$

Estimation ponctuelle de θ .
Une réalisation $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est un échantillon observé de taille n .

$\boxed{T_{obs} = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)}$ est alors une **estimation ponctuelle** de θ .

Estimation par intervalle de confiance de θ .

Soit $\alpha \in [0,1]$ et U_n et V_n deux estimateurs de θ tels que $\boxed{P[\, U_n \le \theta \le V_n \,] \ \ge \ 1-\alpha}$.
On dit que $[U_n, V_n]$ est un **intervalle de confiance** de θ au niveau de confiance $1-\alpha$.
L'intervalle $[U_{obs}, V_{obs}]$ est une **estimation de l'intervalle de confiance** de θ .

Estimation par intervalle de confiance asymptotique de θ .

Soit $\alpha \in [0,1]$ et U_n et V_n deux estimateurs de θ tels que $\boxed{P[\, U_n \le \theta \le V_n \,] \ \ge \ 1-\alpha_n}$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha$
On dit que $[U_n, V_n]$ est un **intervalle de confiance asymptotique** de θ au niveau de confiance $1-\alpha$.

On suppose que T_n admet une espérance :
Biais de T_n : $\boxed{b(T_n) = E(T_n) - \theta}$. $\boxed{T_n \text{ est \textbf{sans biais} si } E(T_n) = \theta}$
$\boxed{T_n \text{ est asymptotiquement sans biais si } \lim\limits_{n \to +\infty} E(T_n) = \theta}$.

On suppose que T_n admet un moment d'ordre 2 :
Risque quadratique de T_n : $\boxed{r(T_n) = E[(T_n - \theta)^2] = V(T_n) + b^2(T_n)}$.

L'estimateur T_n est dit **convergent** si la suite (T_n) converge en probabilité vers θ .

Condition suffisante : $\boxed{\text{Si } \lim\limits_{n \to +\infty} r(T_n) = 0 \text{ , alors } T_n \text{ est convergent}}$

Conséquence :
Si T_n est sans biais et si $\lim\limits_{n \to +\infty} V(T_n) = 0$, alors T_n est un estimateur convergent .

Soit T_n un estimateur convergent de θ et f une application continue de **R** dans **R** .
Alors $f(T_n)$ est un estimateur convergent de $f(\theta)$.

Obtention d'un intervalle de confiance de θ à l'aide d'un estimateur sans biais et convergent de θ obtenu par l'inégalité de Bienaymé Tchebychev

---

Exemples d'estimateurs :

Soit un n-échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de VAR indépendantes et de même loi que X.

Si X admet un moment d'ordre 2 , alors la moyenne empirique $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + .. + X_n}{n}$ est un estimateur sans biais et convergent de $E(X)$

Si X admet un moment d'ordre 4 , alors l'écart type empirique $\sigma_n = \sqrt{\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2}\right) - \overline{X_n}^2}$ est un estimateur convergent de $\sigma(X)$.

Estimation de l'espérance m d'une VAR X

<u>Estimation ponctuelle</u> de $m = E(X)$: $\boxed{\overline{X}_{obs}}$

<u>Estimation par intervalle de confiance asymptotique</u> de $m = E(X)$:

Savoir retrouver le résultat suivant (X admettant un moment d'ordre 2 , on note $\sigma = \sigma(X)$) :

> Soit $\alpha \in [0,1]$ et t_α le réel tel que $\boxed{\Phi(t_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}}$
>
> $\boxed{\left[\overline{X_n} - \dfrac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} , \overline{X_n} + \dfrac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right]}$ est un intervalle de confiance asymptotique de $E(X)$
>
> au niveau de confiance $1-\alpha$

Si σ ne dépend pas de m , on peut faire une estimation de cet intervalle .

Sinon on peut chercher à majorer σ par une constante indépendante de m

ou « remplacer » σ par σ_n dans le cas où X admet un moment d'ordre 4
(justification validée par le théorème de Slutsky)

Estimation du paramètre p d'une loi de Bernoulli
de la proportion p d'individus vérifiant une propriété donnée .

<u>Estimation ponctuelle</u> : $\boxed{\overline{X}_{obs}}$ proportion observée sur un échantillon de taille n .

<u>Estimation par intervalle de confiance</u> de p obtenu par l'inégalité de Bienaymé Tchebychev en majorant $p(1-p)$ par $\dfrac{1}{4}$.

<u>Estimation par intervalle de confiance asymptotique</u> de p obtenu par l'approximation normale de la loi binômiale en majorant $p(1-p)$ par $\dfrac{1}{4}$.

<u>Estimation par intervalle de confiance asymptotique</u> de p obtenu par l'approximation normale de la loi binômiale en remplaçant $p(1-p)$ par $\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)$.