BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE SUJET :
280
HEC_M1_S

Concepteur : H.E.C.

OPTION : SCIENTITIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 2 Mai 2007, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, I la matrice identité, et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et 1 colonne. On confond $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

Préliminaire

Soit E un espace vectoriel réel. On appelle *norme* sur E, toute application ν de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :
i) $\nu(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;
ii) pour tout λ réel, pour tout x de E : $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$;
iii) pour tout couple (x, y) de E^2 : $\nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y)$.

Montrer que l'application $|| \, ||_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définie par : pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, $||X||_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Partie I

A. Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que l'application qui, à toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe le réel $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$, définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La norme de A sera notée $||A||$.

2. a) Établir pour tout X de $\mathbb{R}^n$, l'inégalité : $||AX||_\infty \leqslant ||A|| \times ||X||_\infty$.

b) Montrer qu'il existe un vecteur X_0 de $\mathbb{R}^n$, non nul, tel que $||AX_0||_\infty = ||A|| \times ||X_0||_\infty$.
En déduire que $||A|| = \sup\limits_{X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0} \dfrac{||AX||_\infty}{||X||_\infty}$.

c) Établir alors que pour tout couple (A, B) de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on a $||AB|| \leqslant ||A|| \times ||B||$.

On dit qu'une suite $(A_m)_{m\geqslant 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $\lim\limits_{m\to+\infty} ||A_m - A|| = 0$. On pose $A_m = (a_{i,j}(m))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

3. a) Montrer que $(A_m)_{m\geqslant 0}$ converge vers A si et seulement si pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$: $\lim\limits_{m\to+\infty} a_{i,j}(m) = a_{i,j}$.

b) Montrer que si $(A_m)_{m\geqslant 0}$ converge vers A et $(B_m)_{m\geqslant 0}$ converge vers B, alors $(A_mB_m)_{m\geqslant 0}$ converge vers AB.

4. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $||A|| < 1$.

a) Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} A^m$.

b) Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A, alors $|\lambda| < 1$. En déduire que les matrices $I - A$ et $I + A$ sont inversibles.

c) Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{m} A^k\right)_m$ converge, et exprimer sa limite en fonction de la matrice A.

Soit $(A_m)_{m\geqslant 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la série de terme général A_m (qu'on notera $\sum\limits_{m\geqslant 0} A_m$) converge, si la suite $\left(\sum\limits_{m=0}^{p} A_m\right)_p$ converge. Dans ce cas, sa limite est notée $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} A_m$.

5. On considère dans cette question, une matrice non nulle N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété suivante : il existe un entier p supérieur ou égal à 2 tel que $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$.

a) Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}N^k$ converge. On note $M = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}N^k$.

b) Montrer que $\{X \in \mathbb{R}^n / (M - I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n / NX = 0\}$.

6. a) Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}D^k$ converge.

b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}A^k$ converge, et exprimer sa somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k$ en fonction de P et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}D^k$.

On admet **jusqu'à la fin du problème** *que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}A^k$ converge, et on note : $\exp(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k$.*

7. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose, pour tout m de $\mathbb{N}^*$: $A_m = \left(I + \frac{1}{m}A\right)^m$.

a) Établir l'inégalité :

$$\left\|\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}A^k - A_m\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}\right) \frac{||A||^k}{k!}$$

b) En déduire que la suite $(A_m)_m$ converge vers $\exp(A)$.

B. Propriétés de l'exponentielle de matrice

On admet que si A et B sont éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB = BA$, alors, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

1. Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $\exp(A)$ est inversible et déterminer son inverse.

2. a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice S_A telle que $\exp(A) - I = A(I + S_A)$.

b) Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $x \longmapsto e^x - 1 - 2x$.

c) En déduire que si $||A|| < 1$, alors $||S_A|| < 1$.

d) On suppose que $||A|| < 1$ et que $\exp(A) = I$. Montrer que A est la matrice nulle.

3. On note $\mathcal{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n, et $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n dont les valeurs propres sont strictement positives.

a) Montrer que si A est un élément de $\mathcal{S}_n$, alors $\exp(A)$ est un élément de $\mathcal{S}_n^{++}$.

b) Montrer que l'application exp restreinte à $\mathcal{S}_n$ est une surjection de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n^{++}$.

4. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n$ telles que $\exp(A) = \exp(B)$. On note u (resp. v) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A (resp. B), et $\exp(u)$ (resp. $\exp(v)$) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $\exp(A)$ (resp. $\exp(B)$).

a) Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres.

b) Montrer que $A \times \exp(B) = \exp(B) \times A$.

c) Soit F un sous-espace propre de v.

i) Montrer que F est également un sous-espace propre de $\exp(v)$.

ii) Montrer que la restriction de u à F induit un endomorphisme de F diagonalisable.

d) En se plaçant dans une base de diagonalisation de v, montrer alors que u et v ont les mêmes vecteurs propres. En déduire que $A = B$.

Partie II

1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_1) = 0$, et pour tout i de $[\![2, n]\!]$, $f(e_i) = e_{i-1}$.

On note N la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$. Déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}$, la matrice N^k.

2. Soit p un réel de $]0, 1[$. On définit les matrices R_p et Q_p par : $R_p = (1-p)I + pN = I + Q_p$.

a) Établir l'égalité : $\exp(Q_p) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} e^{-p} \frac{p^j}{j!} N^j$.

b) Calculer $||R_p||$ et $||Q_p||$. Montrer que $||\exp(Q_p)|| \leqslant 1$.

3. a) Soit m un entier supérieur ou égal à 1, et $p_1, p_2, \ldots, p_m$ des réels de l'intervalle $]0, 1[$.
On pose pour tout i de $[\![1, m]\!]$, $R_i = R_{p_i}$ et $Q_i = Q_{p_i}$. Montrer les égalités suivantes :

$$\prod_{k=1}^{m} \exp(Q_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^{m} Q_k\right) = \exp\Big(\Big[-\sum_{k=1}^{m} p_k\Big](I - N)\Big)$$

b) Établir la relation suivante :

$$\prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m} \exp(Q_k) = [R_1 - \exp(Q_1)]\,(R_2 \times \cdots \times R_m) - \exp(Q_1)\,[\exp(Q_2) \times \cdots \times \exp(Q_m) - R_2 \times \cdots \times R_m]$$

c) En déduire la majoration suivante : $\displaystyle\left\|\prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m} \exp(Q_k)\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \|R_k - \exp(Q_k)\|$.

4. a) Montrer l'égalité : $\|\exp(Q_1)-R_1\| = |e^{-p_1}-1+p_1| + p_1|e^{-p_1}-1| + e^{-p_1}\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\frac{p_1^k}{k!}$.

b) En déduire successivement les deux inégalités :

$$\|\exp(Q_1)-R_1\| \leqslant 2p_1^2 \quad \text{et} \quad \left\|\prod_{k=1}^{m} R_k - \prod_{k=1}^{m}\exp(Q_k)\right\| \leqslant 2\sum_{k=1}^{m} p_k^2$$

Partie III.

Les notations sont celles de la partie II.

On considère m pièces de monnaie ($1 \leqslant m < n$), telles que pour tout i de $[\![1,m]\!]$, la i-ième pièce donne Pile avec la probabilité p_i, et Face avec la probabilité $1-p_i$. On pose $\lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$.

Un joueur lance successivement la première pièce, la deuxième pièce, etc. jusqu'à la m-ième pièce, cette expérience étant modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout k de $[\![1,m]\!]$, on note S_k la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus à l'issue des k premiers lancers.

1. a) Montrer que pour tout k de $[\![1,m]\!]$, les $k+1$ premiers éléments de la première ligne du produit matriciel $R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k$ représentent la loi de S_k.

b) Montrer la relation suivante : $\left\|\displaystyle\prod_{i=1}^{m} R_i - \prod_{i=1}^{m}\exp(Q_i)\right\| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|P([S_m=k]) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right|$.

c) En déduire l'inégalité suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P([S_m=k]) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\right| \leqslant 2\sum_{i=1}^{m} p_i^2$.

2. Dans un programme Pascal sont faites les déclarations suivantes :

```
const m =... ;
Type tab = array[1..m] of real ;
Var prob : tab ;
```

On suppose que `prob` contient les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_m$ (ainsi `prob[1]` contient p_1 etc.)

Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Sm(prob : tab) : integer` qui simule la variable aléatoire S_m.

MATHEMATIQUES I 2007(épreuve n° 280)

Epreuve conçue par H E C

Voie Scientifique

	NBRE CANDIDATS	MOYENNES	ECARTS-TYPE
RESULTATS GLOBAUX	2 446	10,06	4,91

VOIES PREPARATOIRES			
Scientifique	2 446	10,06	4,91

ECOLES UTILISATRICES			
HEC	2 007	10,85	4,84
ESCP-EAP	2 374	10,17	4,91
ENSAE	165	12,34	5,10

LE SUJET

Cette année, le sujet portait sur l'inégalité de Le Cam par des méthodes essentiellement algébriques.

Dans le préliminaire et la partieI.A, il s'agissait d'étudier les propriétés d'une norme matricielle dont les propriétés permettaient de prouver l'inégalité de Le Cam. Le libellé des questions induisait une rédaction précise et argumentée. La première question un peu délicate mais dont les réponses étaient données, concernait la recherche d'un vecteur X réalisant l'égalité $\|AX\| = \|A\| \times \|X\|$. On définissait ensuite les suites et les séries matricielles dont on demandait de trouver quelques propriétés, et notamment de démontrer que la suite $(I+A/n)^n$ convergeait vers exp(A).

La partieI.B s'intéressait à la restriction de l'exponentielle à l'espace vectoriel des matrices symétriques.

La partie II était technique et préparait l'application probabiliste de la partie III. On commençait par étudier les puissances d'une matrice nilpotente, et on en déduisait des inégalités sur les normes matricielles.
Enfin, dans la partie III, on cherchait la loi de la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus à l'issue des k premiers lancers, dans un jeu de Pile ou Face avec m pièces dont les probabilités d'obtention de Pile ou Face étaient différentes d'une pièce à l'autre.
Le problème ne se prêtait guère à un « grappillage »de points, et il a joué, compte tenu d'un barème adapté (46% pour le préliminaire et la partie I.A, 26% pour la partie I.B, 20% pour la partie II, et 8% pour la partie III), son rôle de classement des candidats.

ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

PRÉLIMINAIRE ET PARTIE I.A

1) La plupart des candidats ont proposé le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1, et peu d'entre eux ont ensuite su démontrer que la norme matricielle était sous-multiplicative.

4.a) L'étude de la limite de la série de terme général A^n a souvent conduit à des arguments hasardeux (tous les coefficients de A sont majorés en valeur absolue par 1).

4.b) Cette question, portant sur les valeurs propres, a été mieux comprise et résolue que la précédente.

7) Très peu de candidats ont abouti à la conclusion même si la majoration de la question 7.a) a souvent été obtenue. En effet, il était très tentant d'affirmer que la somme de la série numérique majorante était nulle puisque son terme général tendait vers zéro.

PARTIE I.B

Cette partie n'a pas été très réussie dans l'ensemble, mais un bon nombre de candidats ont su exploiter leurs connaissances et les questions précédentes pour montrer que l'exponentielle d'une matrice symétrique était symétrique définie positive.

PARTIE II

Même si l'examen du produit matriciel pouvait être utile, il était préférable d'utiliser l'endomorphisme associé. Par la suite, sans doute pris par le temps, les candidats ont aligné des calculs, sans toujours les justifier correctement lorsque, par exemple, on envisageait un produit d'exponentielles de matrices.

PARTIE III

Les matrices R de la partie précédente devaient permettre d'étudier la loi de la variable aléatoire S, mais le lien n'a été vu que dans les meilleures copies. La dernière question, qui portait sur une simulation de S par un programme Pascal, a souvent été résolue correctement.

RECOMMANDATIONS AUX FUTURS CANDIDATS

Pour ce qui concerne la forme, le jury conseille aux futurs candidats de lire attentivement le texte préliminaire qui précède toute épreuve de mathématiques, dans lequel il est précisé notamment, que la lisibilité et la qualité de la rédaction entrent pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies. Il est également conseillé de bien numéroter ses questions et d'encadrer ses résultats.

De plus, les raisonnements doivent être clairs et précis, les affirmations étant étayés par une argumentation solide. Par exemple, le recours trop fréquent à des phrases du type « il est clair que… » doit être évité au profit d'une justification correcte fondée sur un apprentissage très sérieux et une très bonne connaissance du cours.

Enfin, le jury recommande aux futurs candidats de prendre le temps de lire l'ensemble du sujet, non seulement pour s'en imprégner, mais aussi pour pointer les questions qui paraissent faciles à résoudre, lesquelles ne se situent pas nécessairement dans la première partie du sujet.