

## ESC Maths 2007 S

## EXERCICE 1

On considère l'espace vectoriel  $E = \mathbb{K}^5$  où  $\mathbb{K}$  peut être  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  suivant les cas, muni de sa base canonique  $\mathcal{BC} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$  ainsi que du produit scalaire canonique et de la norme associés.

On note  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par les relations suivantes :

$$f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3, f(e_3) = e_4, f(e_4) = e_5, f(e_5) = e_1 + w, \text{ où } w = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5.$$

On note  $id$  l'endomorphisme identité de  $E$  défini par  $id(u) = u$  pour tout vecteur  $u$  de  $E$ .

On note également  $0_E$  le vecteur nul de  $E$ .

1. On considère le polynôme  $P$  défini sur  $\mathbb{C}$  par  $P(z) = 2 + z + z^2 + z^3 + z^4 - z^5$ .

- Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $(1 - z)P(z) = (2 - z)(1 - z^5)$ .
- le réel 1 est-il racine de  $P$ ? En déduire les 5 racines de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ .
- Donner la matrice  $A$  de l'endomorphisme  $f$  relativement à la base  $\mathcal{BC}$ .
- Montrer alors l'équivalence : ( $\lambda$  est valeur propre de  $A$ )  $\Leftrightarrow$  ( $P(\lambda) = 0$ ).  
En déduire les valeurs propres de  $f$  lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , puis lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .
- On suppose dans cette question uniquement que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .  $f$  est-il diagonalisable?
- On suppose dans cette question uniquement que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .  $f$  est-il diagonalisable?

2. On étudie dans cette question le sous-espace propre associé à la valeur propre 2, noté  $E_2 = \text{Ker}(f - 2id)$ .

- Calculer  $f(w)$  et en déduire que  $w \in E_2$ .
- Soit  $H = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ . Justifier que  $H$  est de dimension 4.
- Soit  $u$  un vecteur de  $H$ . Montrer que  $\|f(u)\| = \|u\|$ .
- Soit  $v$  un vecteur de  $E_2$ . Montrer que  $\|f(v)\| = 2\|v\|$ .
- En déduire que  $H \cap E_2 = \{0_E\}$  puis donner une base de  $E_2$ .

3. Etude de  $f^5$ :

- Montrer que pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $f^k(w) = 2^k w$ .
- Montrer que  $f^5(e_1) = e_1 + w$ , puis, que pour  $k = 2, 3, 4$  on a  $f^5(e_k) = e_k + 2^{k-1} w$ .
- Montrer que la famille  $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3, e_4, w)$  est une base de  $E$ .
- Former la matrice de  $f^5$  relativement à la base  $\mathcal{B}'$  et donner les valeurs propres de  $f^5$ .

4. Questions générales :

- Soit  $\lambda$  un élément de  $\mathbb{R}$  et  $g$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^5$ .  
Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $g$  alors  $\lambda^5$  est valeur propre de l'endomorphisme  $g^5$ .
- En examinant l'endomorphisme  $f$ , que peut-on conclure sur une réciproque à cette propriété?

## EXERCICE 2

On pose pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$  et  $J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$ .

1. Prouver la convergence de l'intégrale impropre appelée  $I_n$ .

2. Montrer que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante, et convergente vers une limite notée  $\ell$ .

3. On pose pour tout réel  $A > 0$  et tout entier naturel  $n$  non nul :  $I_n(A) = \int_0^A \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$ .

Par une intégration par parties, montrer que  $I_n(A) = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n(I_n(A) - I_{n+1}(A))$ .

4. Dans cette question on montre que la limite de  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , notée  $\ell$ , est nulle.

(a) A l'aide de la question 3., montrer que  $\frac{J_n}{3n} = \frac{1}{3n \cdot 2^n} + (J_n - J_{n+1})$ .

(b) Justifier que les séries de terme général  $(J_n - J_{n+1})$  et  $\frac{1}{3n \cdot 2^n}$  sont convergentes.

En déduire la nature de la série de terme général  $\frac{J_n}{3n}$ .

(c) Soit  $\beta$  un réel non nul et  $(a_n)$  une suite équivalente à  $(\frac{\beta}{3n})$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Justifier que la série de terme général  $a_n$  diverge et en déduire par l'absurde que  $\ell = 0$ .

5. (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq \frac{1}{3n-1}$ .

(b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

6. (a) Grâce à la question 3., montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$ .

(b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2,  $I_n = I_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$ .

7. On admet que  $I_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ . Recopier et compléter le programme ci-dessous afin qu'il demande

un entier  $n$  supérieur à 2 et calcule puis affiche la valeur de  $I_n$  trouvée à la question 6. (b) :

```

program esc ;
var
    k , n : integer ;
    l : real ;
begin
    writeln ( ..... ) ;
    readln ( ..... ) ;
    l := 2 * pi / ( 3 * sqrt(3) ) ;
    for k := 1 to n - 1 do ..... ;
    writeln ( ..... ) ;
end .

```

### EXERCICE 3

Les deux parties sont indépendantes. Dans tout l'énoncé  $p$  est un réel de l'intervalle ] 0 ; 1 [ et  $q = 1 - p$ .

#### PARTIE A :

Sur une table sont placées deux boules noires ( étape 0 ).

Une des deux boules est choisie au hasard et éliminée de la table .

Ensuite on repose sur la table : soit une boule blanche , avec la probabilité  $p$  ,

soit une boule noire , avec la probabilité  $q$  .

On a alors atteint l'étape 1 . Cette action est répétée ainsi indéfiniment , de sorte qu'à chaque étape  $k$  ,

deux boules sont sur la table : soit deux noires ( événement noté  $A_k$  )

soit une noire et une blanche ( événement noté  $B_k$  )

soit deux blanches ( événement noté  $C_k$  ) .

A chaque étape, une des deux boules est choisie au hasard puis remplacée comme précédemment soit par une boule blanche avec la probabilité  $p$  soit par une boule noire avec la probabilité  $q = 1 - p$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}$  on note également  $a_k = P(A_k)$ ,  $b_k = P(B_k)$ ,  $c_k = P(C_k)$  et on pose les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} q & \frac{q}{2} & 0 \\ p & \frac{1}{2} & q \\ 0 & \frac{p}{2} & p \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p - q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix} \text{ et } U_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}, \text{ avec } U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer le produit  $PD$ .
- (b) Calculer le produit  $MP$  et, en utilisant la relation  $p + q = 1$ , vérifier que  $MP = PD$ .
2. (a) Donner  $a_0, b_0, c_0$ . Justifier que  $a_1 = q$ ,  $b_1 = p$  et  $c_1 = 0$ .
- (b) Soit  $k$  un entier naturel non nul.  
Justifier que :  $P_{A_k}(A_{k+1}) = q$ ,  $P_{B_k}(A_{k+1}) = \frac{q}{2}$  et  $P_{C_k}(A_{k+1}) = 0$ .  
Donner aussi  $P_{A_k}(B_{k+1})$ ,  $P_{B_k}(B_{k+1})$ ,  $P_{C_k}(B_{k+1})$ ,  $P_{A_k}(C_{k+1})$ ,  $P_{B_k}(C_{k+1})$ ,  $P_{C_k}(C_{k+1})$ .
- (c) Montrer que pour tout entier naturel  $k$  non nul :  $U_{k+1} = MU_k$ .
- (d) En utilisant la question 1.(b), montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $k$  non nul :

$$U_k = P D^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (e) En déduire pour tout entier naturel  $k$  non nul  $a_k, b_k, c_k$  en fonction de  $k$  et montrer que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = q^2, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 2pq, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = p^2.$$

**PARTIE B :  $n$  désigne un entier naturel non nul.**

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables mutuellement indépendantes et de même loi ( On donne celle de  $X_1$  ) :

$$P(X_1 = -1) = q^2 \quad P(X_1 = 0) = 2pq \quad P(X_1 = 1) = p^2$$

1. (a) Justifier que  $X_1(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$  et montrer que l'espérance de  $X_1$  est  $E(X_1) = p - q$ .
- (b) Montrer que la variance de  $X_1$  est égale à  $V(X_1) = 2pq$ .

2. On pose  $Z_n = \sum_{k=1}^n \frac{1 + X_k}{2n}$ .

- (a) Déterminer  $E(Z_n)$  et  $V(Z_n)$ .
- (b) En déduire que pour tout réel  $\varepsilon > 0$ ,  $P(|Z_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{pq}{2n\varepsilon^2}$ , puis montrer que  $(Z_n)$  converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine égale à  $p$ .
- (c) Justifier que  $(Z_n)$  est un estimateur de  $p$  sans biais et convergent.