**I )** 1 ) a ) Posons pour $x\in I$, $\varphi(x)=e^{-ax}y(x)$. Alors $\forall x\in I$, $\boxed{\varphi'(x)=e^{-ax}(-ay(x)+y'(x))}$.

On en déduit que $y$ est solution de $(E_f)$ si et seulement si $\forall x\in I$, $e^{ax}\varphi'(x)+f(x)=0$ autrement dit si et seulement si $\forall x\in I$, $\varphi'(x)=-e^{-ax}f(x)$. $f\in E$ donc $x\to e^{-ax}f(x)$ est continue sur $I$ et par suite $x\to\int_1^x e^{-at}f(t)dt$ est l'unique primitive de $x\to e^{-ax}f(x)$ qui s'annule en 1 .

Finalement $y$ est solution de $(E_f)$ si et seulement si il existe $K\in\mathbf{R}$, $\forall x\in I$, $\varphi(x)=-\int_1^x e^{-at}f(t)dt+K$ .

**CCL :** $y$ est solution de $(E_f)$ si et seulement si il existe $K\in\mathbf{R}$, $\forall x\in I$, $y(x)=e^{ax}\left(K-\int_1^x e^{-at}f(t)dt\right)$ .

b ) Supposons $y_1$ et $y_2$ deux solutions de $(E_f)$ bornées sur $I$ .

Alors il existe $K_1,K_2\in\mathbf{R}$, $\forall x\in I$, $y_1(x)=e^{ax}\left(K_1-\int_1^x e^{-at}f(t)dt\right)$ et $y_2(x)=e^{ax}\left(K_2-\int_1^x e^{-at}f(t)dt\right)$

et il existe $M_1,M_2\in\mathbf{R}$, $\forall x\in I$, $|y_1(x)|\le M_1$ et $|y_2(x)|\le M_2$.

On en déduit $\forall x\in I$, $y_1(x)-y_2(x)=e^{ax}(K_1-K_2)$ et par suite $\forall x\in I$, $0\le|K_1-K_2|\le e^{-ax}(M_1+M_2)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-ax}=0$ ( $a>0$ ) , nécessairement $K_1=K_2$ et donc $y_1=y_2$.

**CCL :** S'il existe une solution de $(E_f)$ bornée sur $I$ , celle ci est unique .

c ) $f\in E$ donc $t\to e^{-at}f(t)$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty}e^{-at}f(t)dt$ est impropre en $+\infty$.

De plus $f$ est bornée donc il existe $M\in\mathbf{R}$, $\forall t\in I$, $0\le|e^{-at}f(t)|\le Me^{-at}$ .

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x e^{-at}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{e^{-at}}{a}\right]_1^x=\frac{e^{-a}}{a}\in\mathbf{R}$ donc $\int_1^{+\infty}e^{-at}dt$ convergente et d'après le critère de comparaison ,les fonctions étant positives , $\boxed{\int_1^{+\infty}e^{-at}f(t)dt \text{ est absolument convergente donc convergente}}$

d ) On en déduit que pour tout $x\in I$, $\int_x^{+\infty}e^{-at}f(t)dt$ cv et $\int_x^{+\infty}e^{-at}f(t)dt=\int_1^{+\infty}e^{-at}f(t)dt-\int_1^x e^{-at}f(t)dt$ .

D'après 1 ) a ) , $g$ est solution de $(E_f)$ ( avec $K=\int_1^{+\infty}e^{-at}f(t)dt$ ) .

De plus $\forall x\in I$, $\left|\int_x^{+\infty}e^{-at}f(t)dt\right|\le\int_x^{+\infty}|e^{-at}f(t)|dt\le M\int_x^{+\infty}e^{-at}dt=M\frac{e^{-ax}}{a}$ et donc $\forall x\in I$, $|g(x)|\le\frac{M}{a}$

On peut conclure avec le 1 ) b ) , que $\boxed{g \text{ est l'unique solution de } (E_f) \text{ qui soit bornée sur } I}$.

2 ) On a avec les notations de l'énoncé ,pour $f\in E$, $\boxed{\forall x\in I,\ U(f)(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}f(t)dt}$.

a ) Si $f=1$, $f\in E$ et $\forall x\in I$, $U(f)(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}dt=e^{ax}\times\frac{e^{-ax}}{a}=\frac{1}{a}$ . $\boxed{U(f)=\frac{1}{a}}$.

b ) Soit $f,g\in E$ et $\lambda\in\mathbf{R}$. $\forall x\in I$, $U(\lambda f+g)(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}(\lambda f+g)(t)dt$

$$=\lambda e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}f(t)dt+e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}g(t)dt \text{ (int. cv)}$$

$$=\lambda U(f)+U(g).$$

$U$ est linéaire . De plus si $f\in E$, alors d'après 1 ) , $g=U(f)$ est continue ( car $C^1$ ) et bornée sur $I$ , autrement dit $g\in E$ . **CCL :** $\boxed{U\in\mathbf{L}(E)}$.

c ) Si $g=U(f)$ , alors $\forall x\in I$, $g'(x)-ag(x)+f(x)=0$ . On a donc $U(f)=0_E \Rightarrow f=0_E$ .
Comme $U$ est linéaire , $f=0_E \Rightarrow U(f)=0_E$ . **CCL :** $\boxed{KerU=\{0_E\}\text{ . }U\text{ est injectif}}$.

d ) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a $U^{n+1}(f):\ x\to e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)dt$ pour toute fonction $f$ de $E$ .

- La pté est vraie pour $n=0$ d'après 1 ) d ) .

- Soit $n\in\mathbf{N}$ . Supposons $\forall x\in I$ , $U^{n+1}(f)(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)dt$ pour tout $f\in E$ .

Soit $f\in E$ . Alors $U(f)\in E$ et donc $\forall x\in I$ , $U^{n+2}(f)(x)=U^{n+1}\big(U(f)\big)(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}U\big(f\big)(t)dt$
Posons $g=U(f)$ et $h(t)=e^{-at}U(f)(t)=e^{-at}g(t)$ . Alors $h'(t)=e^{-at}(g'(t)-ag(t))=-e^{-at}f(t)$
et par IPP , pour $A>0$ , $\int_x^A\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}U\big(f\big)(t)dt=\left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}U\big(f\big)(t)\right]_x^A-\int_x^A\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}(-e^{-at}f(t))dt$
$(A-x)^n e^{-aA}\underset{A\to+\infty}{\sim}A^n e^{-aA}$ donc par croissances comparées , puisque $U(f)$ est bornée $(U(f)\in E)$ ,
$\lim\limits_{A\to+\infty}(A-x)^n e^{-aA}\times U(f)(A)=0$ .
On en déduit $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_x^A\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}f(t)dt=\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}U\big(f\big)(t)dt=e^{-ax}U^{n+2}(f)(x)\in\mathbf{R}$
et par suite $\forall x\in\mathbf{R}$, $U^{n+2}(f)(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}f(t)dt$

- **CCL :** $\boxed{\forall n\in\mathbf{N},\ U^{n+1}(f):\ x\to e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)dt\text{ pour tout }f\in E}$

3 ) a) $f_k(x)=e^{-kx}$ avec $k\geq 0$ . $f\in E$ et $\forall x\in I$, $U(f_k)(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-(a+k)t}dt=e^{ax}\times\frac{e^{-(a+k)x}}{a+k}=\frac{e^{-kx}}{a+k}$.
On en déduit $\boxed{U(f_k)=\frac{1}{a+k}f_k}$.

b ) Puisque $f_k\neq 0_E$ , pour tout $k\geq 0$ , $\frac{1}{a+k}$ est une valeur propre de $U$ et $Ker\left(U-\frac{1}{a+k}Id_E\right)\neq\{0_E\}$ .
Lorsque $k$ décrit $[0,+\infty[$ , $\frac{1}{a+k}$ décrit $\left]0,\frac{1}{a}\right]$ ( $x\to\frac{1}{a+x}$ continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ ) .
**CCL :** $\boxed{\forall\lambda\in\left]0,\frac{1}{a}\right],\ Ker(U-\lambda Id_E)\neq\{0_E\}}$.

c ) Par récurrence immédiate , ($U$ est linéaire ) , $\boxed{\forall n\in\mathbf{N}\ ,\ U^n(f_k)=\frac{1}{(a+k)^n}f_k}$ .
Soit $x\in I$ . $U^n(f_k)(x)=\frac{1}{(a+k)^n}f_k(x)=\frac{e^{-kx}}{(a+k)^n}$ . On a $a>0$ et $k\geq 0$ .
$\boxed{\text{Si } a+k<1,\ \lim\limits_{n\to+\infty}U^n(f_k)(x)=+\infty\text{ . Si } a+k=1,\ \lim\limits_{n\to+\infty}U^n(f_k)(x)=f_k(x)\text{ . Si } a+k>1,\ \lim\limits_{n\to+\infty}U^n(f_k)=0}$.

4 ) a ) Si $f=\sin$, $f\in E$ et $\forall x\in I$, $U(f)(x)=e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-t}\sin t\,dt$ .

Soit $x\in I$ et $A>x$ .Par une double IPP ,

$\int_{x}^{A} e^{-t}\sin t dt=\left[-e^{-t}\sin t\right]_{x}^{A}+\int_{x}^{A} e^{-t}\cos t dt=-e^{-A}\sin A+e^{-x}\sin x+\left[-e^{-t}\cos t\right]_{x}^{A}-\int_{x}^{A} e^{-t}\sin t dt$

et donc $2\int_{x}^{A} e^{-t}\sin t dt=-e^{-A}\sin A+e^{-x}\sin x-e^{-A}\cos A+e^{-x}\cos x$ .

Par PAL ( $A\to+\infty$ ) , comme sin et cos sont bornées et $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-A}=0$,

on obtient $\int_{x}^{+\infty} e^{-t}\sin t dt=\frac{1}{2}e^{-x}\left[\sin x+\cos x\right]$ et par suite $\boxed{U(\sin)=\frac{1}{2}\left[\sin+\cos\right]}$.

Par la même méthode , on obtient $\boxed{U(\cos)=\frac{1}{2}\left[-\sin+\cos\right]}$.

b) $P=Vect(\sin,\cos)$ .

D'après 4 ) a ), $U(\sin)\in P$ et $U(\cos)\in P$ donc $\forall\lambda,\mu\in\mathbf{R}, U(\lambda\sin+\mu\cos)=\lambda U(\sin)+\mu U(\cos)\in P$ :
$\boxed{P \text{ est stable par } U}$.

$\lambda\sin+\mu\cos=0_{E}\Rightarrow\forall x\in I, \lambda\sin x+\mu\cos x=0$ . Avec $x=\frac{\pi}{2}$ et $\pi$, on obtient $\lambda=0$ et $\mu=0$ .

$(\sin,\cos)$ est donc une famille libre et par suite $\boxed{(\sin,\cos) \text{ base de } P}$ et $\boxed{M=\underset{(\sin,\cos)}{mat}(U_{P})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}}$.

c ) $\boxed{M^{2}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix},\ M^{3}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2&-2\\2&-2\end{pmatrix}, M^{4}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}}$.

$M^{4}=-\frac{1}{4}I_{2}$ donc $\boxed{\forall k\in\mathbf{N},\ M^{4k}=(-\frac{1}{4})^{k}I_{2}\ ,\ \ M^{4k+1}=(-\frac{1}{4})^{k}M\ \ ,\ \ M^{4k+2}=(-\frac{1}{4})^{k}M^{2},\ \ M^{4k+3}=(-\frac{1}{4})^{k}M^{3}}$.

$-1<-\frac{1}{4}<1$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty}(-\frac{1}{4})^{k}=0$ et par suite $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} M^{n}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}$.

5 ) $\varphi_{n}(x)=e^{-x}x^{n}$ . $\varphi_{n}\in E$ et $\forall x\in I$, $\psi_{n}(x)=U(\varphi_{n})(x)=e^{ax}\int_{x}^{+\infty} t^{n}e^{-(a+1)t}dt$ .

a ) Soit $n\in\mathbf{N}^{*}$ . Soit $x\in I$ et $A>x$ . Par IPP , $\int_{x}^{A} t^{n}e^{-(a+1)t}dt=\left[-\frac{1}{a+1}t^{n}e^{-(a+1)t}\right]_{x}^{A}+\frac{n}{a+1}\int_{x}^{A} t^{n-1}e^{-(a+1)t}dt$

Par PAL ( $A\to+\infty$ ) ,on obtient , puisque par croissances comparées , $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{n}e^{-(a+1)A}=0$,

$\int_{x}^{+\infty} t^{n}e^{-(a+1)t}dt=\frac{1}{a+1}x^{n}e^{-(a+1)x}+\frac{n}{a+1}\int_{x}^{+\infty} t^{n-1}e^{-(a+1)t}dt$ et donc $\psi_{n}(x)=\frac{1}{a+1}\varphi_{n}(x)+\frac{n}{a+1}\psi_{n-1}(x)$.

**CCL :** $\boxed{\forall n\in\mathbf{N}^{*}, \psi_{n}=\frac{1}{a+1}\varphi_{n}+\frac{n}{a+1}\psi_{n-1}}$.

b ) $F_{p}=Vect(\varphi_{0},\varphi_{1},...,\varphi_{p})$ . $\varphi_{0}(x)=e^{-x}$ donc $\varphi_{0}=f_{1}$ et $\psi_{0}=U(\varphi_{0})=\frac{1}{a+1}\varphi_{0}$ .

On en déduit $U(\varphi_{0})\in F_{p}$ et comme $U(\varphi_{n})=\frac{1}{a+1}\varphi_{n}+\frac{n}{a+1}U(\varphi_{n-1})$, on a par récurrence immédiate ,

$\forall n\in[[0,p]], U(\varphi_{n})\in F_{p}$ . **CCL :** $\boxed{F_{p} \text{ est stable par } U}$.

Soit $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_p \in \mathbf{R}$. $\lambda_0\varphi_0+\lambda_1\varphi_1+...+\lambda_p\varphi_p=0_E \Rightarrow \forall x\in I, \lambda_0+\lambda_1 x+...+\lambda_p x^p=0$ ( car $e^{-x}\neq 0$)
Le polynôme $\lambda_0+\lambda_1 X+...+\lambda_p X^p$ s'annule donc une infinité de fois . Par suite il est égal au polynôme nul et donc $\lambda_0=\lambda_1=...=\lambda_p=0$. $(\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_p)$ est donc une famille libre de $E$ .
Par suite $\boxed{(\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_p) \text{ base de } F_p}$.

c ) $U(\varphi_0)=\dfrac{1}{a+1}\varphi_0$ . $U(\varphi_1)=\psi_1=\dfrac{1}{a+1}\varphi_1+\dfrac{1}{a+1}\psi_0=\dfrac{1}{a+1}\varphi_1+\dfrac{1}{(a+1)^2}\varphi_0$

$U(\varphi_2)=\psi_2=\dfrac{1}{a+1}\varphi_2+\dfrac{2}{a+1}\psi_1=\dfrac{1}{a+1}\varphi_2+\dfrac{2}{(a+1)^2}\varphi_1+\dfrac{2}{(a+1)^3}\varphi_0$.

On en déduit $\boxed{T_2=\underset{(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2)}{mat}(U)=\begin{pmatrix}\frac{1}{a+1} & \frac{1}{(a+1)^2} & \frac{2}{(a+1)^3}\\ 0 & \frac{1}{a+1} & \frac{2}{(a+1)^2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{a+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{a+1}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{a+1} & \frac{2}{(a+1)^2}\\ 0 & 1 & \frac{2}{a+1}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$.

On a $T_2=\dfrac{1}{a+1}A$ avec $A=I_3+N$ et $N^3=0$. D'où comme $I_3$ et $A$ commutent ,

$\forall n\geq 2$ , $T_2^{\,n}=\dfrac{1}{(a+1)^n}(I_3+N)^n=\dfrac{1}{(a+1)^n}(I_3+\binom{n}{1}N+\binom{n}{2}N^2)$.

On obtient $\forall n\geq 2$ , $\boxed{T_2^{\,n}=\frac{1}{(a+1)^n}\begin{pmatrix}1 & \frac{n}{a+1} & \frac{n^2+n}{(a+1)^2}\\ 0 & 1 & \frac{2n}{a+1}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$( formule valable aussi pour $n=0$ et $n=1$).

$a>0$ donc $a+1>1$. On en déduit pour $\alpha>0$ , $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o((a+1)^n)$ et par suite $\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_2^{\,n}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$.

6 ) Soit $f\in E$ . $\forall x\in I$, $U(f)(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$ .

Effectuons le changement de variable $t=x+u$ dans l'intégrale convergente $I=\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$ .

$u\to u+x$ est $C^1$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ .

$J=\int_0^{+\infty} e^{-a(x+u)}f(x+u)(1\times du)$ est de même nature ( donc cv ) et égale à $I$ .

On en déduit $J=e^{-ax}\int_0^{+\infty} e^{-au)}f(x+u)du)$ et donc $\boxed{\forall x\in I,\ U(f)(x)=\int_0^{+\infty} e^{-at}f(x+t)dt}$.

7 ) a ) Soit $f\in E$ . Alors $|f|\in E$ ( continue et bornée sur $I$ ) et d'après 6 ) ,

$\forall x\in I$, $|U(f)(x)|=\left|\int_0^{+\infty} e^{-at}f(x+t)dt\right|\leq\int_0^{+\infty}\left|e^{-at}f(x+t)\right|dt$ (intégrales convergentes et bornes dans le bon sens) . On en déduit $\forall x\in I$, $|U(f)(x)|\leq\int_0^{+\infty} e^{-at}\,|f(x+t)|dt=U(|f|)(x)$.

**CCL :** $\boxed{\forall f\in E, |U(f)|\leq U(|f|)}$.

b ) Soit $\varphi\in E$ à valeurs positives . Soit $x\in I$ . Alors $\forall t\in[0,+\infty[$, $e^{-at}\varphi(x+t)\geq 0$ et par intégration (intégrale convergente et bornes dans le bon sens), $\int_0^{+\infty} e^{-at}\varphi(x+t)dt\geq 0$. Par suite $\psi(x)=U(\varphi)(x)=\geq 0$ .

**CCL :** $\boxed{\text{Si } \varphi\in E \text{ est à valeurs positives, alors } \psi=U(\varphi) \text{ est à valeurs positives}}$.

c ) Supposons $\varphi$ décroissante sur $I$ . Soit $x\in I$ . Alors $\forall t\in[0,+\infty[$, $\varphi(x+t)\le\varphi(x)$ et donc ,
$\forall t\in[0,+\infty[$, $e^{-at}\varphi(x+t)\le e^{-at}\varphi(x)$. Par intégration (intégrales convergentes et bornes dans le bon sens),
on obtient $\int_0^{+\infty} e^{-at}\varphi(x+t)dt\le\int_0^{+\infty} e^{-at}\varphi(x)dt=\varphi(x)\times\dfrac{1}{a}$ autrement dit $\psi(x)\le\dfrac{\varphi(x)}{a}$ .
Comme $a>0$ , $\boxed{a\psi\le\varphi}$.
Or $\psi=U(\varphi)$ donc $\forall x\in I$, $\psi'(x)-a\psi(x)+\varphi(x)=0$ ce qui entraîne $\forall x\in I$, $\psi'(x)\le 0$ ./
**CCL :** $\boxed{\psi \text{ décroissante sur } I}$.

8 ) a ) Soit $f\in E_1$. Alors $f'$ est continue ( puisque $C^1$ ) et bornée sur $I$ et donc $f'\in E$.
D'après 6 ) , $\forall x\in I$, $U(f')(x)=\int_0^{+\infty} e^{-at}f'(x+t)dt$ .
Soit $x\in I$ et $A>0$. Par IPP , $\int_0^{A} e^{-at}f'(x+t)dt=\left[e^{-at}f(x+t)\right]_0^A+a\int_0^A e^{-at}f(x+t)dt$

$$=e^{-aA}f(x+A)-f(x)+a\int_0^A e^{-at}f(x+t)dt\ .$$

Par PAL ( $A\to+\infty$ ) , comme $f$ est bornée sur $I$ ( $f\in E$ ) et $\lim_{A\to+\infty} e^{-aA}=0$, on obtient
$\forall x\in I$, $U(f')(x)=-f(x)+aU(f)(x)$ et donc $\boxed{aU(f)=f+U(f')}$.

b ) Posons $g=U(f)$. Puisque $g$ vérifie par définition $\forall x\in I$, $g'(x)-ag(x)+f(x)=0$ , on a
$D(U(f))=aU(f)-f$ .On déduit du 8 ) a ) , $\boxed{D(U(f))=U(D(f))}$.

c ) On en déduit avec le 7 ) b) que si $D(f)\le 0$ alors $D(U(f))=U(D(f))=-U(-D(f))\le 0$.
On retrouve que $\boxed{\text{si } f \text{ positive et décroissante alors } U(f) \text{ décroissante}}$.

**II )** 1 ) Supposons $\alpha(x)\underset{x\to+\infty}{=}o(\beta(x))$. Alors $|\alpha(x)|\underset{x\to+\infty}{=}o(\beta(x))$ et comme $\int_1^{+\infty}\beta(x)dx$ cv ,
on a par critère de comparaison , les fonction étant positives , $\int_1^{+\infty}\alpha(x)dx$ abs cv donc cv .
$\alpha(x)\underset{x\to+\infty}{=}o(\beta(x))$ donc $\exists A>0,\quad \forall t\ge A,\quad |\alpha(t)|<\varepsilon|\beta(t)|$
ce qui entraîne puisque $\forall t\in I, \beta(t)>0$, que pour $x\ge A$, $\forall t\ge x$, $|\alpha(t)|<\varepsilon\,\beta(t)$.
On en déduit $\boxed{\forall x\ge A, \left|\int_x^{+\infty}\alpha(t)dt\right|\le\int_x^{+\infty}|\alpha(t)|dt\le\varepsilon\int_x^{+\infty}\beta(t)dt}$ avec $\int_x^{+\infty}\beta(t)dt>0$.
Finalement on a montré : $\forall\varepsilon>0, \exists A>0, \forall x\ge A, \left|\dfrac{\int_x^{+\infty}\alpha(t)dt}{\int_x^{+\infty}\beta(t)dt}\right|\le\varepsilon$ autrement dit $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\int_x^{+\infty}\alpha(t)dt}{\int_x^{+\infty}\beta(t)dt}=0$.

**CCL:** $\boxed{\int_x^{+\infty}\alpha(t)dt\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\int_x^{+\infty}\beta(t)dt\right)}$.

b ) Supposons $\alpha(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\beta(x)$. Comme $\int_1^{+\infty}\beta(x)dx$ cv , on a par critère de comparaison , les fonctions étant positives , $\int_1^{+\infty}\alpha(x)dx$ cv . On a $\alpha(x)\underset{x\to+\infty}{=}\beta(x)+o(\beta(x))$ autrement dit $(\alpha-\beta)(x)\underset{x\to+\infty}{=}+o(\beta(x))$.
En appliquant le 1 ) a ) , on obtient $\int_x^{+\infty}(\alpha-\beta)(t)dt\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\int_x^{+\infty}\beta(t)dt\right)$, puis par linéarité ,
$\int_x^{+\infty}\alpha(t)dt\underset{x\to+\infty}{=}\int_x^{+\infty}\beta(t)dt+o\left(\int_x^{+\infty}\beta(t)dt\right)$ et donc $\boxed{\int_x^{+\infty}\alpha(t)dt\underset{x\to+\infty}{\sim}\int_x^{+\infty}\beta(t)dt}$.

2 ) Supposons $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$. Alors $f(t)\underset{t\to+\infty}{=}o(1)$ et aussi $e^{-at}f(t)\underset{t\to+\infty}{=}o(e^{-at})$ .

En appliquant le 1 ) a ) avec $\beta(t)=e^{-at}>0$, on obtient $\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\int_x^{+\infty} e^{-at}dt\right)$

et donc $g(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt\underset{x\to+\infty}{=}e^{ax}\times o\left(\dfrac{e^{-ax}}{a}\right)$. Finalement $g(x)\underset{x\to+\infty}{=}o(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} U(f)(x)=0$.

Supposons maintenant $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=b\in\mathbf{R}^*$. Alors $f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}b$ et aussi $e^{-at}f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}be^{-at}$.

En appliquant le 1 ) b ) avec $\beta(t)=be^{-at}>0$, on obtient $\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt\underset{x\to+\infty}{\sim}\int_x^{+\infty} be^{-at}dt=be^{-ax}$

et donc $g(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}e^{ax}\times be^{-ax}=b$.

**CCL :** $\boxed{\text{Si } \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=b\in\mathbf{R}\text{, } \lim\limits_{x\to+\infty} U(f)(x)=\dfrac{b}{a}}$.

3 ) a ) On pose pour $\omega>0$ et $t\in I$, $f_\omega(t)=\dfrac{1}{t^\omega}$. $f_\omega\in E$ et $\forall x\in I$, $g_\omega(x)=U(f_\omega)(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\dfrac{1}{t^\omega}dt$ .

Soit $x\in I$ et $A>x$. Par IPP , $\int_x^A t^{-\omega}e^{-at}dt=\left[-\dfrac{1}{a}t^{-\omega}e^{-at}\right]_x^A-\dfrac{\omega}{a}\int_x^A t^{-\omega-1}e^{-at}dt$

Par PAL ( $A\to+\infty$ ) ,on obtient , puisque $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{-\omega}e^{-aA}=0$, $\int_x^{+\infty}\dfrac{e^{-at}}{t^\omega}dt=\dfrac{e^{-ax}}{a\,x^\omega}-\dfrac{\omega}{a}\int_x^{+\infty}\dfrac{e^{-at}}{t^{\omega 1}}dt$

et donc $\boxed{g_\omega(x)=\dfrac{1}{a}f_\omega(x)-\dfrac{\omega}{a}g_{\omega+1}(x)}$. ( autre meth : appliquer le **I** ) 8 ) a ) en utilisant $f_\omega'=-\omega f_{\omega+1}$)

$\dfrac{e^{-at}f_{\omega+1}(t)}{e^{-at}f_\omega(t)}=\dfrac{1}{t}$ donc $e^{-at}f_{\omega+1}(t)\underset{t\to+\infty}{=}o(e^{-at}f_\omega(t))$ avec $e^{-at}f_\omega(t)>0$ et $\int_1^{+\infty} e^{-at}f_\omega(t)dt$ convergente ( $f_\omega\in E$ ).

En appliquant le 1 ) a ) avec $\beta(t)=e^{-at}f_\omega(t)$, on obtient $g_{\omega+1}(x)\underset{x\to+\infty}{=}o(g_\omega(x))$.

On en déduit $\dfrac{1}{a}f_\omega(x)\underset{x\to+\infty}{=}g_\omega(x)+o(g_\omega(x))$ et donc $\boxed{g_\omega(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{a}f_\omega(x)}$.

b ) Soit $n\in\mathbf{N}^*$ et $t>0$. Appliquons l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre $n$ à la fonction
$u\xrightarrow{h}e^{-au}$ $C^{n+1}$ sur $[0,t]$. On a $\forall u\in[0,t]$, $h^{(k)}(u)=(-a)^k e^{-au}$ et $\left|h^{(n+1)}(u)\right|\le a^{n+1}$ car $-au<0$ .

On obtient $\left|h(t)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{t^k}{k!}h^{(k)}(0)\right|\le\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}a^{n+1}$ i.e. $\forall t>0$, $\left|e^{-at}-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{t^k}{k!}(-a)^k\right|\le\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}a^{n+1}$.

On en déduit $\forall t>0$, $\left|\dfrac{e^{-at}}{t}-\dfrac{1}{t}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{t^{k-1}}{k!}(-a)^k\right|\le\dfrac{t^n}{(n+1)!}a^{n+1}$

Soit $x\in I$. Par intégration d'inégalité sur $[1,x]$( $x\ge1$), on obtient

$$\left|\int_1^x\left(\frac{e^{-at}}{t}-\frac{1}{t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{k-1}}{k!}(-a)^k\right)dt\right|\le\int_1^x\left|\frac{e^{-at}}{t}-\frac{1}{t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{k-1}}{k!}(-a)^k\right|dt\le\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\int_1^x t^n dt \text{ autrement dit}$$

$$\left|\int_1^x\frac{e^{-at}}{t}dt-\ln x-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{a^k}{kk!}(x^k-1)\right|\le\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x^{n+1}-1}{n+1}\right).\quad \text{On a}\quad \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x^{n+1}-1}{n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{(ax)^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}.$$

Comme $(ax)^n\underset{n\to+\infty}{=}o(n!)$ , on obtient à l'aide du théorème d'encadrement ,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln x+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\dfrac{a^k}{kk!}(x^k-1)=\int_1^x\dfrac{e^{-at}}{t}dt$ .**CCL :** $\boxed{\int_1^x\dfrac{e^{-at}}{t}dt=\ln x+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\dfrac{a^k}{kk!}(x^k-1)}$.

$\forall x\in I\,,\;\; g_1(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\,\dfrac{1}{t}\,dt=e^{ax}\left[\int_1^{+\infty}\dfrac{e^{-at}}{t}dt-\int_1^{x}\dfrac{e^{-at}}{t}dt\right]$ et donc avec le résultat précédent

$\boxed{\forall x\in I\,,\;\; g_1(x)=e^{ax}\left[-\ln x-\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\dfrac{a^k}{kk!}(x^k-1)+\int_1^{+\infty}\dfrac{e^{-at}}{t}dt\right]}$.

4 ) a ) Soit $f\in E$ . $\forall x\in I$, $g(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}f(t)dt$ .

Supposons $f(t)\underset{t\to+\infty}{=}o(f_\omega(t))$ . Alors on a aussi $e^{-at}f(t)\underset{t\to+\infty}{=}o(e^{-at}f_\omega(t))$ avec $e^{-at}f_\omega(t)>0$ et $\int_1^{+\infty}e^{-at}f_\omega(t)dt$ cv ( $f_\omega\in E$ ). En appliquant le 1 ) a ) avec $\beta(t)=e^{-at}f_\omega(t)$**,** on obtient $\boxed{g(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(g_\omega(x)\right)}$**.**

b ) Supposons $f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}f_\omega(t)$ . Alors on a aussi $e^{-at}f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}e^{-at}f_\omega(t)$ avec $e^{-at}f_\omega(t)>0$ et $\int_1^{+\infty}e^{-at}f_\omega(t)dt$ cv ( $f_\omega\in E$ ). En appliquant le 1 ) b ) avec $\beta(t)=e^{-at}f_\omega(t)$**,** on obtient $g(x)\underset{t\to+\infty}{\sim}g_\omega(x)$**.**

Avec le 3 ) a ) , on déduit $g(x)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{f_\omega(x)}{a}$ et comme $f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}f_\omega(t)$ , $\boxed{g(x)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{f(x)}{a}}$**.**

**III )** 1 ) a ) $f_k(x)=e^{-kx}$ avec $k>0$ . On a vu **I )** 3 ) que $g_k=U(f_k)=\dfrac{1}{a+k}f_k$ .

Comme $k>0$, $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A e^{-kt}dt=\dfrac{e^{-k}}{k}\in\mathbf{R}$ , $\boxed{\int_1^{+\infty}g_k(t)dt\text{ convergente}}$.

b ) On a vu au 3 ) a ) que $g_\omega(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{a}f_\omega(x)>0$ donc les intégrales $\int_1^{+\infty}g_\omega(t)dt$ et $\int_1^{+\infty}f_\omega(t)dt$ sont de même nature . $\int_1^{+\infty}f_\omega(t)dt=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^\omega}dt$ cv ssi $\omega>1$ (Riemann ) donc $\boxed{\int_1^{+\infty}g_\omega(t)dt\text{ convergente ssi }\omega>1}$.

2 ) Supposons $f\in E$ , $f\geq 0$ et $\int_1^{+\infty}f(t)dt$ cv . $f$ et $g$ sont continues sur $I$ donc $F$ et $G$ sont respectivement les primitives de $f$ et $g$ sur $I$ qui s'annulent en 1 .

a ) Par hypothèse $\forall t\in I$, $g'(t)-ag(t)+f(t)=0$.
En intégrant sur $[1,x]$, on obtient pour $x\in I$, $g(x)-g(1)-aG(x)+F(x)=0$ et donc $\boxed{G'-aG=-F+g(1)}$.

b ) $F$ est continue sur $I$ puisque dérivable .
Puisque $f\geq 0$ et $\int_1^{+\infty}f(t)dt$ cv , on a $\forall x\in[1,+\infty[$ , $0\leq\int_1^x f(t)dt\leq\int_1^{+\infty}f(t)dt$ . $F$ est donc bornée .
**CCL :** $\boxed{F\in E}$ .

On en déduit $F-g(1)\in E$ et puisque $U$ est linéaire , $U(F-g(1))=U(F)-g(1)U(1)=U(F)-\dfrac{g(1)}{a}$ .
Puisque $G'-aG+F-g(1)=0$, il existe , d'après **I )** 1) a ) , un réel $C$ tel que
$\forall x\in I,\; G(x)=e^{ax}\left(C-\int_1^x e^{-at}(F(t)-g(1))dt\right)=e^{ax}\left(C-\int_1^{+\infty}e^{-at}(F(t)-g(1))dt+\int_x^{+\infty}e^{-at}(F(t)-g(1))dt\right)$

En posant $K=C-\int_1^{+\infty}e^{-at}(F(t)-g(1))dt$ , on déduit $\boxed{\exists K\in\mathbf{R},\;\forall x\in I\;,\;G(x)=Ke^{ax}+\left(U(F)\right)(x)-\dfrac{g(1)}{a}}$.

c ) Soit $x\in I$ . $g(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$ donc comme $f\geq 0$ , $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ cv et $t\to e^{-at}$ décroissante ,

$0\leq g(x)\leq e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-ax}f(t)dt\leq \int_1^{+\infty} f(t)dt$ . On en déduit $0\leq G(x)=\int_1^{x} g(t)dt\leq (x-1)\int_1^{+\infty} f(t)dt$ .

Finalement $\forall x\in I$ , $0\leq \dfrac{G(x)}{x}\leq \int_1^{+\infty} f(t)dt$ : $\boxed{x\to \dfrac{G(x)}{x} \text{ est bornée sur } I}$.

( autre méthode : $g\in E$ donc $g$ est bornée sur $I$ et $\forall x\in I$ , $\left|\dfrac{G(x)}{x}\right|\leq \dfrac{1}{x}\int_1^{x}|g(t)|dt\leq \dfrac{1}{x}(x-1)\sup\limits_{t\in I}|g(t)|$

Par suite $\forall x\in I$ , $\left|\dfrac{G(x)}{x}\right|\leq \sup\limits_{t\in I}|g(t)|$ ) .

d ) Par définition $U(F)$ est bornée . D'après 2 ) b ) , $\forall x\in I$ , $G(x)=Ke^{ax}+\big(U(F)\big)(x)-\dfrac{g(1)}{a}$ .

Si $K\neq 0$ , $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{G(x)}{x}=(sign(K)\times\infty$ (car $x\underset{x\to+\infty}{=}o(e^{ax})$ ) .Impossible puisque $x\to\dfrac{G(x)}{x}$ est bornée sur $I$ .

On en déduit $\boxed{K=0}$ et donc $\boxed{G=U(F)-\dfrac{g(1)}{a}}$ .

e ) Puisque $U(F)$ est bornée , $G$ est donc majorée et comme $G'=g\geq 0$ car $f\geq 0$ (voir **I )**7)b) ) ,

$G$ est croissante sur $I$ . On en déduit que $G$ admet une limite finie en $+\infty$ : $\boxed{\int_1^{+\infty} g(t)dt \text{ convergente}}$ .

3 ) Supposons $f\in E$ et $\int_1^{+\infty}|f(t)|dt$ cv . Alors $|f|\in E$ à valeurs positives et d'après 2)e) ,

$\int_1^{+\infty}\big[U(|f|)\big](t)dt$ est convergente .

D'après **I )** 7) a), $0\leq |U(f)|\leq U(|f|)$ , donc d'après le critère de comparaison , les fonctions étant positives , $\int_1^{+\infty}|U(f)|(t)dt$ est convergente . **CCL :** $\boxed{\int_1^{+\infty} g(t)dt \text{ est absolument convergente}}$.

Autre meth pour I ) 2 ) d )

d ) $t^2\times(t-x)^n e^{-at} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{n+2}e^{-at}$ donc par croissances comparées , puisque $f$ est bornée ,

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\times(t-x)^n e^{-at}\times f(t)=0$ .On en déduit que pour $x\in I$ , $\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)dt$ est abs convergente

Posons pour $x\in I$ et $n\in\mathbf{N}$ , $g_n(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)dt$ . ( on a $g_0=g$ ) ( $g_n$ bornée ? $t=u+x$ )

Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbf{N},\ U^{n+1}(f)=g_n$ .

- La pté est vraie pour $n=0$ puisque $U(f)=g=g_0$ .
- Soit $n\in\mathbf{N}$ . Supposons $U^{n+1}(f)=g_n$ et posons $h_n(x)=e^{-ax}g_n(x)=\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)dt$

Alors pour $x\in I$ , $h_{n+1}(x)=\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}f(t)dt=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-x)^{n+1-k}\int_x^{+\infty}t^ke^{-at}f(t)dt$ .

Comme $\int_x^{+\infty}t^ke^{-at}f(t)dt=\int_1^{+\infty}t^ke^{-at}f(t)dt-\int_1^x t^ke^{-at}f(t)dt$ , $x\to\int_x^{+\infty}t^ke^{-at}f(t)dt$ est une primitive sur $I$ de $x\to -x^ke^{-ax}f(x)$ et donc

$$h_{n+1}'(x)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left[-(n+1-k)(-x)^{n-k}\int_x^{+\infty}t^ke^{-at}f(t)dt-(-x)^{n+1-k}x^ke^{-ax}f(x)\right]$$

ce qui s'écrit $h_{n+1}'(x)=-\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^{n-k}\int_x^{+\infty}t^ke^{-at}f(t)dt-(-1)^{n+1}x^{n+1}e^{-ax}f(x)\underbrace{\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k}_{=(1-1)^{n+1}=0}$

ou encore $h_{n+1}'(x)=-\frac{1}{n!}\int_x^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^{n-k}t^ke^{-at}f(t)dt=-\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)dt$ .

On trouve donc $h_{n+1}'(x)=-h_n(x)$ ce qui se traduit par $e^{-ax}(-ag_{n+1}(x)+g_{n+1}'(x))=-e^{-ax}g_n(x)$ ,

autrement dit $\forall x\in E,\quad g_{n+1}'(x)-ag_{n+1}(x)+g_n(x)=0$ . D'où $g_{n+1}=U(g_n)=U^{n+2}(f)$ .

- **CCL :** $\boxed{\forall n\in\mathbf{N},\ U^{n+1}(f)=g_n:\ x\to e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)dt}$.