2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

On considère l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $p \geqslant 2$ à coefficients réels. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note a et b les endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associés.

1. a) Montrer que l'on a : $\begin{cases} \mathrm{Ker}(b) \subseteq \mathrm{Ker}(a \circ b) \\ \mathrm{Im}(a \circ b) \subseteq \mathrm{Im}(a) \end{cases}$

b) Montrer que si le produit AB est inversible, alors les matrices A et B sont inversibles.

2. Soit λ un réel non nul.

a) Montrer que la matrice $(\lambda I - AB)$ est inversible si et seulement si la matrice $(\lambda I - BA)$ l'est.

b) On suppose dans cette question que λ n'est pas valeur propre de la matrice AB. Montrer que l'on a alors :

$$(\lambda I - AB)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda} A(\lambda I - BA)^{-1} B$$

c) Montrer que les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

3. On considère les matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer, après avoir justifié son existence, l'inverse de la matrice $I - AB$.

Solution :

1. a) Si $Bx = 0$, alors $ABx = 0$. De même tout vecteur ABx s'écrit $A(Bx)$.

b) Si la matrice AB est inversible, il vient $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker}(AB) = \{0\}$, ce qui entraîne que B est inversible. De même $\mathbb{R}^p = \operatorname{Im}(AB) \subseteq \operatorname{Im}(A)$ entraîne que A est inversible.

2. Supposons la matrice $\lambda I - AB$ inversible. Soit $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - BA)$.
Alors $BAx = \lambda x \implies ABAx = \lambda Ax$, ce qui donne :
$Ax \in \operatorname{Ker}(\lambda I - AB) = \{0\}$. Donc $Ax = 0$ et $0 = BAx = \lambda x$ entraîne que $\lambda x = 0$. Enfin $\lambda \neq 0$ entraîne que $x = 0$.
Les matrices AB et BA jouant des rles symétriques, on obtient la réciproque demandée.

b) Posons $X = \frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda}(\lambda I - BA)^{-1}B$. Il vient :

$$\begin{aligned}(\lambda I - AB)X &= \frac{\lambda I - AB}{\lambda} + \frac{\lambda A - ABA}{\lambda}\,(\lambda I - BA)^{-1}\,B\\ &= \frac{\lambda I - AB}{\lambda} + \frac{A(\lambda I - BA)}{\lambda}\,(\lambda I - BA)^{-1}\,B\\ &= \frac{\lambda I - AB}{\lambda} + \frac{AB}{\lambda} = I\end{aligned}$$

c) La question 2.a) montre que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles. La question 1.b) montre que 0 est valeur propre de AB si et seulement si 0 est valeur propre de BA.

3. En effectuant le produit BA, on trouve : $BA = \begin{pmatrix} p & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$

On en déduit que les valeurs propres de BA sont 0 et p.

Le réel 1 n'étant pas valeur propre de BA, il n'est pas valeur propre de AB, d'où l'existence de $(I - AB)^{-1}$. Pour calculer cette matrice, on utilise la question 2.b), qui donne :

$$(I - AB)^{-1} = \frac{1}{1-p}\begin{pmatrix} (2-p) & 1 & \dots & 1\\ 1 & (2-p) & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & 1 & (2-p)\end{pmatrix}$$

Exercice 2.2.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, non réduit au vecteur nul. On note :

$$\mathcal{C} = \{(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2 \ / \ u \circ v - v \circ u = id_E\}$$

1. Montrer que :

$$(u, v) \in \mathcal{C} \implies \forall\, \lambda \neq 0, (\lambda u, \frac{v}{\lambda}) \in \mathcal{C}$$

Que peut-on en déduire sur $\mathcal{C}$? $\mathcal{C}$ est-il un espace vectoriel ?

2. Dans cette question seulement, on suppose que E est de dimension finie n.

a) Montrer que l'application tr définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs réelles par :

$$\text{pour tout } A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n},\ tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

est une application linéaire.

b) Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

c) En déduire que $\mathcal{C} = \emptyset$.

3. Soit (u, v) un couple d'endomorphismes de $\mathcal{C}$. Montrer que pour tout entier $n > 0$:

$$u^n \circ v - v \circ u^n = nu^{n-1}$$

En déduire que :

- ni u ni v ne peuvent être des projecteurs ;
- ni u ni v ne peuvent être nilpotents (on dit qu'un endomorphisme f est nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$).

4. Dans cette question, $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère l'application v définie sur E par $v(P) = XP$. Déterminer u tel que $(u, v) \in \mathcal{C}$.

Solution :

1. Pour $\lambda \neq 0$, on a : $(\lambda u)\circ(\frac{1}{\lambda}v) - (\frac{1}{\lambda}v)\circ\lambda u = u\circ v - v\circ u$, d'où l'équivalence.

Si $\mathcal{C}$ n'est pas vide, il contient au moins un couple (u_0, v_0), avec u_0 et v_0 distincts de l'endomorphisme nul et donc l'infinité des couples de la forme $(\lambda u_0, \frac{1}{\lambda}v_0)$.

$(0, 0) \notin \mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}$ n'est pas un espace vectoriel.

2. a) $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{R}$ et on vérifie directement : $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{tr}(A)$. Ainsi $\mathrm{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

b) Avec des notations standard :

$$\begin{cases} \mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A)_{i,j}(B)_{j,i} \\ \mathrm{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n}(BA)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(B)_{i,j}(A)_{j,i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(B)_{i,j}(A)_{j,i} \end{cases}$$

Dans la dernière somme on permute les rles de i et j et on reconnaît $\mathrm{tr}(AB)$. Ainsi $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

c) Soit $(u, v) \in \mathcal{C}$, si on note U et V les matrices associées à u et v dans une base $\mathcal{B}$ de E, la relation de définition de $\mathcal{C}$ donne : $UV - VU = I_n$, d'où :

$$n = \mathrm{tr}(I_n) = \mathrm{tr}(UV - VU) = \mathrm{tr}(UV) - \mathrm{tr}(VU) = 0$$

Ce qui nie la première hypothèse faite sur E. Ainsi il n'existe pas de couple convenant et $\mathcal{C} = \emptyset$.

3. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

→ Pour $n = 1$, comme $u^0 = Id$, il s'agit simplement du fait que $(u, v) \in \mathcal{C}$.
→ On suppose le résultat au rang n acquis, alors :

$$\begin{aligned} u^{n+1} \circ v - v \circ u^{n+1} &= u \circ u^n \circ v - v \circ u^{n+1} = u \circ (nu^{n-1} + v \circ u^n) - v \circ u \circ u^n \\ &= nu^n + (u \circ v - v \circ u) \circ u^n = nu^n + u^n = (n+1)u^n \end{aligned}$$

D'où le résultat au rang $n + 1$. On conclut par le principe de récurrence.

⋆ Si u est un projecteur, alors $\forall\, n \geqslant 1, u^n = u$, donc :
$2u = u^2 \circ v - v \circ u^2 = u \circ v - v \circ u = id_E$, soit $u = \dfrac{1}{2} id_E$, ce qui n'est pas raisonnable pour un projecteur.

⋆ Si u est nilpotent, soit $p \in \mathbb{N}^*$ son indice de nilpotence, il vient :
$0 = u^p \circ v - v \circ u^p = pu^{p-1}$, donc $u^{p-1} = 0$, ce qui contredit la minimalité de p.

Pour conclure, il reste à faire le même travail pour v, pour cela on remarque que :

$$u \circ v - v \circ u = id_E \iff v \circ (-u) - (-u) \circ v = id_E$$

Ainsi $(u, v) \in \mathcal{C} \implies (v, -u) \in \mathcal{C}$ et les conclusions sur v en découlent.

4. Si $[u(P)](X) = X.P(X)$, on doit avoir :

$$Xv(P) - v(PX) = P, \text{ donc } v(XP) = Xv(P) + P$$

ce qui est vérifié pour l'opération de dérivation $v : P \mapsto P'$
On a bien alors $(X.P)' - X.P' = P + X.P' - XP' = P$, *i.e.* $u \circ v - v \circ u = id_E$.

Exercice 2.3.

On note

$$\mathcal{S} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \text{ avec } x_n \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n, \lim_{n\to-\infty} x_n \text{ existent}\}$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$.

Soit T l'application définie sur $\mathcal{S}$ par $T((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, avec pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$$

2. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{S}$. Déterminer son noyau.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse aux valeurs propres réelles de T, c'est-à-dire aux réels λ tels que $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id) \neq \{0\}$, *où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathcal{S}$ et on pose* $A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$.

3. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $U_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$.

Montrer que $x \in \mathrm{Ker}(T - \lambda Id)$ si et seulement si pour tout k de $\mathbb{Z}$, $U_{k+1} = A_\lambda U_k$. En déduire que pour tout k de $\mathbb{Z}$, on a alors : $U_k = A_\lambda^k U_0$.

4. a) On suppose que $\lambda \notin \{-2, 2\}$. Montrer que A_λ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En déduire que si $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \operatorname{Ker}(T - \lambda Id)$, il existe des nombres complexes $\alpha, \beta, \mu_1, \mu_2$ tels que, pour tout k de $\mathbb{Z}$, on ait :

$$x_k = \alpha\mu_1^k + \beta\mu_2^k$$

En distinguant les deux cas $|\lambda| > 2$ et $|\lambda| < 2$, montrer que $\operatorname{Ker}(T - \lambda Id) = \{0\}$.

b) Que peut-on dire de $\operatorname{Ker}(T - 2Id)$?

c) Montrer que $\operatorname{Ker}(T + 2Id) = \{0\}$.

Conclure.

Solution :

1. $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$, car si $\lim\limits_{n\to\pm\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to\pm\infty} y_n$ existent (si vous nous permettez ce regroupement de limites), alors pour tout λ réel, $\lim\limits_{n\to\pm\infty} (x_n + \lambda y_n)$ existent.

2. On vérifie aisément que T est linéaire puis que T est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.
Le noyau de T est formé des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z} : x_{n+1} = -x_{n-1}$.
On demande en plus que $\lim\limits_{n\to\pm\infty} x_n$ existent. Or, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $x_{2p} = (-1)^p x_0$ et $x_{2p+1} = (-1)^p x_1$. Les limites en $\pm\infty$ existent si et seulement si $x_0 = x_1 = 0$ et alors $x = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

3. On a $T(x) = \lambda x$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{Z} : x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k$.
On a alors pour tout k :

$$U_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} = A_\lambda U_{k-1}$$

Une récurrence évidente montre que pour $k \in \mathbb{N}$, $U_k = A_\lambda^k U_0$. La matrice A_λ est inversible (son déterminant (produit en croix) est égal à 1), et $U_{-1} = A_\lambda^{-1} U_0$. Par récurrence, pour $k \in \mathbb{Z}^-$, $U_k = A_\lambda^k U_0$.

4. a) On montre que les valeurs propres de A_λ vérifient l'équation $x^2 - \lambda x + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = \lambda^2 - 4$.
Ainsi si $|\lambda| \neq 2$, A_λ admet deux valeurs propres distinctes réelles ou complexes μ_1, μ_2 avec$\mu_1\mu_2 = 1$ et $\mu_1 + \mu_2 = \lambda$. De plus, la matrice A_λ est diagonalisable.
En écrivant $A_\lambda^k = P \operatorname{diag}(\mu_1^k, \mu_2^k) P^{-1}$, valable pour $k \in \mathbb{Z}$, et en calculant le premier terme de $A_\lambda^k U_0$, on voit que x_k est bien de la forme $\alpha\mu_1^k + \beta\mu_2^k$.
$\to$ Si $|\lambda| > 2$, les deux valeurs propres sont réelles.
On ne peut avoir $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$, car $|\mu_1 + \mu_2| > 2$. Ainsi, par exemple, $|\mu_1| > 1$, et $|\mu_2| < 1$. Aussi, $\lim\limits_{k\to+\infty} |\mu_1|^k = +\infty$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} |\mu_2|^k = 0$. L'existence

d'une limite en $+\infty$ pour la suite x impose donc $\alpha = 0$. De même l'existence d'une limite en $-\infty$ impose $\beta = 0$ et x est la suite nulle.

$\rightarrow$ Si $|\lambda| < 2$, les deux valeurs propres sont complexes conjuguées et de module 1.

On peut alors écrire $x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta} = A\cos(k\theta + \varphi)$, avec θ non congru à 0 modulo 2π et l'existence d'une limite en $+\infty$ impose $A = 0$ et donc $x = 0$. Dans les deux cas $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id) = \{0\}$.

b) $x \in \mathrm{Ker}(T - 2Id) \iff \forall\, k \in \mathbb{Z}, x_{k-1} + x_{k+1} = 2x_k$

$$\iff \forall\, k \in \mathbb{Z}, x_{k+1} - x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Ceci caractérise les suites arithmétiques et l'existence de la limite en $+\infty$ impose que la suite x soit constante. La réciproque est claire

c) $x \in \mathrm{Ker}(T + 2Id) \iff \forall\, k \in \mathbb{Z}, x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} = 0$

$$\iff \forall\, k \in \mathbb{Z}, (-1)^{k-1}x_{k-1} + 2(-1)^k x_k + (-1)^{k+1}x_{k+1} = 0$$

Ainsi la suite $((-1)^k x_k)_k$ est arithmétique (voir b)) et l'existence de la limite en $+\infty$ lui impose d'être la suite nulle

En conclusion la seule valeur propre de T est 2, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par la suite constante égale à 1.

Exercice 2.4.

- Pour $k \in \mathbb{N}$, $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^k sur $\mathbb{R}$.
- $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- On pose : $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que E est muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des éléments f de E bornés *i.e.* pour lesquels il existe un réel M positif ou nul (et dépendant de f) tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout x réel.

1. Soit $f \in E$. Justifier l'existence de l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$ et son appartenance à E.

Cette application sera désormais notée $\varphi(f)$. L'application φ est donc une application de E dans lui-même.

2. Expliciter $\varphi(g)$ lorsque $g : t \longmapsto 1$ puis $\varphi(h)$ avec $h : t \longmapsto t$.

3. Prouver que φ est un endomorphisme de E.

4. Établir que φ est injective.

5. L'application φ est-elle surjective ? Déterminer son image.

6. Démontrer que le sous-espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de E est stable par φ.

7. Montrer que $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par φ.

8. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de φ.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur tout segment $[0,x]$, donc l'intégrale existe et $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{f(x)}{1+x^2}$.

2. $\star$ $\varphi(g)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arc}\tan x$, donc $\varphi(g) = \operatorname{Arc}\tan$.

$\star$ $\varphi(h)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

3. La linéarité est claire et $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue.

4. Si $f \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $\varphi(f) = 0$ et *a fortiori* $\varphi(f)' = 0$, soit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{1+x^2}, \text{ soit } f = 0 \text{ et } \varphi \text{ est injective.}$$

5. On a déjà dit que pour $f \in E$, $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi la fonction $x \mapsto |x|$, qui est continue mais pas de classe $\mathcal{C}^1$ n'est l'image de personne et φ n'est pas surjective.

Remarquons également que $\varphi(f)(0) = 0$.

Soit alors F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.
Notons f la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = (1+x^2)F'(x)$. On a, pour tout réel x :

$$\varphi(f)(x) = \int_0^x \frac{(1+t^2)F'(t)}{1+t^2}\,dt = F(x) - F(0) = F(x)$$

Ceci prouve que F est dans l'image de φ.

L'image de φ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, nulles en 0.

6. Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, comme $\varphi(f) : x \mapsto \dfrac{f(x)}{1+x^2}$, la fonction $\varphi(f)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$.

7. $\mathcal{B}$ est évidemment un sous-espace vectoriel de E et si f est bornée, on a :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, |\varphi(f)(x)| = \Big|\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt\Big| \leqslant \Big|\int_0^x \frac{|f(t)|}{1+t^2}\,dt\Big| \leqslant M(f)\Big|\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\Big| \leqslant M(f)\frac{\pi}{2}$

Donc $\varphi(f)$ est bornée.

8. φ est injective, donc 0 n'est pas valeur propre de φ.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une éventuelle valeur propre de φ non nulle et f une fonction propre associée. On a $\varphi(f) = \lambda f$ et, par dérivation :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{1+x^2} = \lambda f'(x)$$

Soit :

$f'(x) = \dfrac{1}{\lambda(1+x^2)} \times f(x)$ et donc : $\exists\, k \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = k \exp(\dfrac{1}{\lambda} \operatorname{Arc}\tan(x))$

Comme f n'est pas la fonction nulle, on a $k \neq 0$ et alors $f(0) = k \neq 0$, ce qui n'est pas compatible avec le résultat $0 = \varphi(f)(0) = \lambda f(0)$.

Ainsi le spectre de φ est vide.

Exercice 2.5.

Dans tout cet exercice, on confond $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que l'on confond un vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$de $\mathbb{R}^n$ avec sa matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associée relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

On rappelle qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique est dite définie positive si, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$ non nul, on a : ${}^tXSX > 0$.

1. Montrer qu'une matrice symétrique réelle S est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

2. Soit M une matrice symétrique réelle définie positive. Soit $C \in \mathbb{R}^n$ donnée. On pose pour tout X de $\mathbb{R}^n$:

$$f_M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_M(X) = {}^tXMX + 2.{}^tCX$$

a) Montrer que f_M admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^n$, valant $-M^{-1}C$

b) Montrer qu'en ce point f atteint son minimum.

Dans la suite, A et B sont deux matrices symétriques réelles définies positives.

3. a) Montrer que $A + B$ est inversible.

b) Montrer que :

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A = A - A(A+B)^{-1}A = B - B(A+B)^{-1}B$$

c) Soit $Z \in \mathbb{R}^n$ donné. Montrer que :

$$\inf\{{}^tXAX + {}^tYBY \ / \ X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ avec } X + Y = Z\}$$

existe et est égal à ${}^tZNZ$ où N est une matrice réelle que l'on exprimera en fonction de A et B.

Solution :

1. $\star$ Supposons S symétrique réelle définie positive. Soit $SX = \lambda X$, avec $X \neq 0$.
Alors ${}^tXSX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2 > 0$, ce qui entraîne que λ est strictement positif.

$\star$ Réciproquement, supposons que les valeurs propres de S sont toutes strictement positives. Soit P une matrice orthogonale diagonalisante pour S. Pour toute colonne X non nulle, on a alors :

$$ {}^tXSX = {}^tXP \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) {}^tPX = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 $$

où $Y = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne non nulle ${}^tPX$. Donc les réels y_i ne sont pas tous nuls et ${}^tXSX > 0$.

2. $\star$ On peut écrire :

$$ \begin{aligned} f_M(X) = f_M(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i,j} m_{i,j} x_i x_j + 2 \sum_i c_i x_i \\ &= m_{1,1} x_1^2 + 2x_1 \Big(\sum_{j=2}^n m_{1,j} x_j + c_1\Big) + \cdots \ (M \text{ est symétrique}) \end{aligned} $$

d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(X) = 2\Big(\sum_{j=1}^n m_{1,j} x_j + c_1\Big)$, *idem* pour les autres dérivées partielles.
Ainsi les éventuels points critiques X vérifient $MX + C = 0$. Comme M est inversible, il n'y en a qu'un valant :

$$ X_0 = -M^{-1}C $$

$\star$ On écrit maintenant :

$$ f_M(X_0 + H) - f_M(X_0) = 2 {}^tX_0 MH + 2 {}^tCH + {}^tHMH = {}^tHMH $$

et cette quantité est strictement positive pour tout $H \neq 0$, on est donc en présence d'un minimum absolu strict.

3. a) La matrice $A + B$ qui est symétrique réelle est définie positive, car pour toute colonne X non nulle :

$$ {}^tX(A + B)X = {}^tXAX + {}^tXBX > 0. $$

b) On a : $A(A + B)^{-1} + B(A + B)^{-1} = I$, donc

$$ \begin{cases} A(A + B)^{-1}B + B(A + B)^{-1}B = B \\ A(A + B)^{-1}A + B(A + B)^{-1}A = A \end{cases} $$

On a aussi : $(A + B)^{-1}A + (A + B)^{-1}B = I$, donc

$$ \begin{cases} A(A + B)^{-1}A + A(A + B)^{-1}B = A \\ A(A + B)^{-1}A + B(A + B)^{-1}A = A \end{cases} $$

En mettant les termes du côté adéquat, ceci donne les égalités demandées.

b) On écrit $Y = Z - X$ et :

$$ \begin{aligned} {}^tXAX + {}^tYBY &= {}^tXAX + {}^t(Z - X)B(Z - X) \\ &= {}^tXAX + {}^tZBZ + {}^tXBX - 2({}^tZB)X \end{aligned} $$

${}^tXAX + {}^tYBY = f_M(X) + {}^tZBZ$, avec :

$M = A + B$ et $C = -BZ$ (B est symétrique et $A + B$ est définie positive)
f admet donc un minimum atteint en $X_0 = M^{-1}C = -(A+B)^{-1}BZ$, le minimum valant :

$$\begin{aligned} f_M(X_0) + {}^tZBZ &= {}^tX_0MX_0 + 2{}^tZBX_0 + {}^tZBZ \\ &= {}^tZB(A+B)^{-1}(A+B)(A+B)^{-1}BZ - 2{}^tZB(A+B)^{-1}BZ + {}^tZBZ \\ &= {}^tZNZ, \text{ avec } N = -B(A+B)^{-1}B + B \end{aligned}$$

Si l'on veut, on peut écrire grâce à b) que $N = A(A+B)^{-1}B$

Exercice 2.6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ la norme euclidienne usuelle de x.

On désigne par N l'application définie sue $\mathbb{R}^n$ par

$$N : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout λ réel :

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{n}} N(x) \leqslant \|x\| \leqslant N(x)$$

Soit T un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note $M(T)$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On suppose dans toute la suite que toutes les valeurs propres de la matrice $M(T)$ (considérée comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) sont réelles.

2. On note $C = \{x \in \mathbb{R}^n,\ N(x) \leqslant 1\}$. Montrer que si $T(C) \subseteq C$, alors toutes les valeurs propres de T ont une valeur absolue inférieure ou égale à 1.

On suppose dans toute la suite que les coefficients $m_{i,j}$ de la matrice $M(T)$ sont tous positifs ou nuls et vérifient les n relations suivantes :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1$$

3. a) Montrer que 1 est valeur propre de T.

b) Montrer que toutes les valeurs propres de T ont une valeur absolue inférieure ou égale à 1.

4. On suppose que T est diagonalisable et que tous les sous-espaces propres E_λ associés aux valeurs propres λ de T sont des droites vectorielles.
On note : $H = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$.

a) Montrer que si λ est valeur propre différente de 1, alors $E_\lambda \subseteq H$.

b) Montrer que $E_1 \not\subseteq H$.

c) En déduire que, si -1 n'est pas valeur propre de T, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la suite $(T^p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ converge (dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$) vers la projection du vecteur x sur la droite vectorielle E_1 parallèlement à H.

Solution :

1. $\star$ $N(\lambda x) = |\lambda x_1| + \cdots + |\lambda x_n| = |\lambda|.N(x)$

$\star$ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$ (dérivée seconde négative), donc pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\sqrt{\frac{1}{n}x_1^2 + \cdots + \frac{1}{n}x_n^2} \geqslant \frac{1}{n}\sqrt{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{n}\sqrt{x_n^2} = \frac{1}{n}N(x) \implies \|x\| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.N(x)$$

$\star$ Soit $y = (|x_1|, \cdots, |x_n|)$,

$\|y\|^2 \leqslant N(y)^2 \iff x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2|x_1x_2| + 2|x_1x_3| + \cdots$, ce qui est banalement vrai.

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}}N(x) \leqslant \|x\| \leqslant N(x)$$

2. Supposons $T(C) \subseteq C$, soit λ une valeur propre de T : il existe $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ tel que $T(v) = \lambda v$.

Soit $w = \dfrac{v}{N(v)}$, on a : $N(w) = 1$, donc $w \in C$ et $T(w) \in C$.

Or : $T(v) = \lambda v \implies T(w) = \lambda \dfrac{v}{N(v)} = \lambda.w$, d'où : $\lambda.w \in C$, soit

$$N(\lambda.w) = |\lambda|.N(w) \leqslant 1 \text{ et } |\lambda| \leqslant 1$$

3. a) Soit U la matrice colonne dont tous les coefficients valent 1, on a : ${}^tMU = U$, donc 1 est valeur propre de ${}^tM$ et ${}^tM - I_n$ n'est pas inversible. Il en est donc de même de $M - I_n$ et 1 est aussi valeur propre de M, *i.e.* de T.

b) Soit $x \in C$, on a :

$$x = \sum_{j=1}^n x_j.e_j \implies T(x) = \sum_{j=1}^n x_j T(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n m_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n x_j m_{i,j}) e_i$$

d'où :

$$N(T(x)) = \sum_{i=1}^n |\sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j| \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}|x_j| = \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \sum_{i=1}^n m_{i,j}\right)$$

Soit : $N(T(x)) \leqslant \sum_{j=1}^n |x_j|.1 = N(x) \leqslant 1$ (car $x \in C$)

On peut donc appliquer le résultat de la question 2. et toutes les valeurs propres de T sont de valeur absolue inférieure ou égale à 1.

4. a) Soit $\lambda \neq 1$ une valeur propre différente de 1, Soit $x \in E_\lambda$, on a $T(x) = \lambda.x$, donc pour tout indice i :

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

Par sommation : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j - \lambda \sum_{i=1}^n x_i = 0$ ou $\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n m_{i,j}) x_j - \lambda \sum_{i=1}^n x_i = 0$,

d'où : $(1 - \lambda) \sum_{i=1}^n x_i = 0$, on en déduit : $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, soit $x \in H$ et $E_\lambda \subseteq H$

b) Puisque T est diagonalisable, $\mathbb{R}^n$ se décompose en la somme directe des n sous-espaces propres.

Par l'absurde, si E_1 était inclus dans H, alors tous les espaces propres seraient inclus dans H et leur somme directe (qui est égale à $\mathbb{R}^n$) serait aussi incluse dans H, d'où l'absurdité. Donc $E_1 \not\subseteq H$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire $x = y + z$, avec $y \in H, z \in E_1$. Pour tout entier p, on a : $T^p(x) = T^p(y) + T^p(z) = T^p(y) + z$ et $\|T^p(x) - z\| = \|T^p(y\|$

Mais $y \in H \Rightarrow y = \sum\limits_{i=1}^{n-1} u_i$ où u_i est un élément de l'espace propre associé à l'une des $n-1$ valeurs propres λ_i différentes de 1.

Ainsi $T^p(y) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i^p.u_i$ et $\|T^p(y)\| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|^p.\|u_i\|$ et $\lim\limits_{p\to\infty} \|T^p(y)\| = 0$.

Dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$, la suite $(T^p(x))$ converge vers la projection du vecteur x sur la droite vectorielle E_1 parallèlement à l'hyperplan d'équation $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Exercice 2.7.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et A, B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E c'est-à-dire tels que $A \oplus B = E$. Soit f une application linéaire de A vers B ($f \in \mathcal{L}(A, B)$). On pose, pour tout a de A :

$$\varphi_f(a) = a + f(a)$$

1. Montrer que l'application φ_f est linéaire et injective. Déterminer son rang.

Pour $f \in \mathcal{L}(A, B)$, on note $A_f = \mathrm{Im}(\varphi_f)$.

2. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(A, B)$, on a $E = A_f \oplus B$.

3. Soit f et g deux éléments de $\mathcal{L}(A, B)$. Montrer que $A_f = A_g$ si et seulement si $f = g$.

4. Soit A' un sous-espace vectoriel de E tel que $E = A' \oplus B$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(A, B)$ tel que $A' = A_f$ (on pourra utiliser la projection sur B parallèlement à A').

5. En déduire qu'en général, B admet une infinité de supplémentaires dans E.

Solution :

1. L'application f peut être considérée comme une application linéaire de A vers E, l'application $a \mapsto a$ peut être considérée comme une application linéaire de A vers E. Ainsi l'application φ_f est linéaaire.

Elle est injective car si $a \in A$ vérifie $a + f(a) = 0$, on a : $a = -f(a) \in B$ et $A \cap B = \{0\}$ entraîne que $a = 0$.

Par le théorème du rang, on obtient $\operatorname{rg} \varphi_f = \dim A$.

2. $\dim A_f = \operatorname{rg} \varphi_f = \dim A$. Comme $\dim A + \dim B = \dim E$, il suffit de démontrer que $A_f \cap B = \{0\}$.

Soit $x \in A_f \cap B$: il existe $a \in A$ tel que $x = a + f(a) = b \in B$.
Donc $a = b - f(a) \in B$ et $A \cap B = \{0\}$ entraîne que $a = 0$, donc $f(a) = 0$ et $x = 0$.

3. Si $f = g$, alors $A_f = A_g$ (si, si !).

Réciproquement, si $A_f = A_g$, alors pour tout $a \in A$, il existe $a' \in A$ tel que $a + f(a) = a' + g(a')$. Donc
$a - a' = g(a') - f(a) \in B$. Toujours parce que $A \cap B = \{0\}$, il vient $a = a'$ et $f(a) = g(a)$ et $f = g$.

4. Soit p la projection sur B parallèlement à A'.
Pour $a \in A$, a s'écrit $a = a' + b$, avec $a' \in A'$ et $b \in B$. Alors
$\varphi_{-p}(a) = a - p(a) = b = a'$ est le projeté de a sur A' parallèlement à B.
Donc $\operatorname{Im} \varphi_{-p} \subset A'$ et comme les dimensions sont *ad hoc*, on a vérifie $A_{\varphi_{-p}} = A'$.

5. D'après les questions précédentes, il y a autant de supplémentaires de B dans E que d'applications $f \in \mathcal{L}(A, B)$. A part les cas dégénérés ($B = E$ et $B = \{0\}$), tout sous-espace admet donc une infinité de supplémentaires.

Exercice 2.8.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On pose $F = E \times E$.

On rappelle que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les opérations

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \text{ et } \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

1. Soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, Montrer que

$$B' = ((e_1, 0), (e_2, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, e_1), (0, e_2), \ldots, (0, e_n))$$

est une base de F.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans la base B. Soit φ l'application de F dans F définie pour $(x, y) \in F$ par :

$$\varphi((x, y)) = (f(x) + f(y), f(y))$$

Montrer que φ est linéaire et donner sa matrice A' dans la base B' de F.

3. a) Montrer que f et φ possèdent les mêmes valeurs propres et que la dimension de l'espace propre de f associé à λ est inférieure ou égale à celle de φ associé à la même valeur propre.

b) On suppose que f est diagonalisable. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre non nulle de f. Montrer que les sous-espaces propres de f et de φ associés à λ sont de même dimension.

(On pourra considérer une base B constituée de vecteurs propres de f et comparer les rangs des matrices associées à $f - \lambda Id_E$ et $\varphi - \lambda Id_F$ relativement aux bases B et B' associée à B.)

Par le même raisonnement, montrer que la dimension du noyau de φ est le double de celui de f.
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit diagonalisable.

Solution :

1. Supposons que : $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, 0) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(0, e_i) = \big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i\big)$.

On en déduit que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = 0$ et comme $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, on a $\lambda_i = \mu_i = 0$ pout tout $i \in [\![1, n]\!]$, donc B' est libre.

Soit $(x, y) \in E \times E$, on écrit $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ et $(x, 0)$ (resp. $(0, y)$) s'écrit à l'aide des vecteurs $(e_i, 0$ (resp. $(0, e_i)$, donc B' est génératrice de F.

B' est une base de F.

2. La linéarité est claire et $A' = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

3. a) $\star$ Soit $(x, y) \in F$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ. Alors

$$\varphi((x, y)) = (f(x) + f(y), f(y)) = (\lambda x, \lambda y)$$

donc $f(y) = \lambda y$.

$\rightarrow$ Si $y \neq 0$, c'est un vecteur propre de f et λ est une valeur propre de f.

$\rightarrow$ Si $y = 0$ alors $f(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$ (sinon (x, y) serait le vecteur nul de E^2), donc x est un vecteur propre de f et λ est une valeur propre de f.

$\star$ Soit $x \in E$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Alors

$$\varphi((x, 0)) = (f(x) + f(0), f(0)) = (f(x), f(0)) = (\lambda x, 0) = \lambda(x, 0).$$

Ceci montre que $(x, 0) \neq (0, 0)$ est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ. De plus $x \mapsto (x, 0)$ est une application linéaire injective du sous-espace propre $E_\lambda(f)$ dans le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi)$. On en déduit l'inégalité demandée sur les dimensions.

b) Prenons une base $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ formée de vecteurs propres de f ; notons D la matrice de f dans B et $T = \begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$ celle de φ dans la base B' associée.

Supposons que la valeur propre $\lambda_1 \neq 0$ apparaisse k fois en haut de la diagonale de D, alors le rang de $D - \lambda_1 I_n$ est $n-k$, donc l'espace propre associé à λ_1 est de dimension k.

Dans la matrice $T - \lambda_1 I_{2n}$, les k premières colonnes sont nulles et une permutation des colonnes restantes montre que celles-ci forment une famille échelonnée donc libre. Ainsi $T - \lambda_1 I_{2n}$ est de rang $2n-k$ et la dimension du sous-espace propre de φ associé à λ_1 est donc $2n-(2n-k)=k$.

Par le même raisonnement pour $\lambda = 0$ (si 0 est valeur propre que l'on peut alors mettre en tête ...), on obtient que la dimension du noyau de φ est le double de celui de f.

L'application f étant diagonalisable, la somme des dimensions des sous espaces propres de f vaut n. Dès que f possède une valeur propre non nulle, la somme des dimensions des sous espaces propres de φ est strictement inférieure à $2n$ donc φ n'est pas diagonalisable.
En revanche si $f = 0$ alors $\varphi = 0$ qui est diagonalisable !

Exercice 2.9.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

On note v_1 le vecteur $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M avec :

$$M = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(les coefficients diagonaux valent 0 et les autres valent $\dfrac{1}{n-1}$)

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

1. a) La matrice $M - I$ est-elle diagonalisable ?
   b) Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - Id) \oplus \mathrm{Im}(f - Id)$

2. Soit p le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f - Id)$.
   a) Déterminer $p(v_1)$ puis $p(e_1), \dots, p(e_n)$.
   b) Expliciter la matrice P de p dans la base $\mathcal{B}$.

3. Soit q le projecteur sur $\mathrm{Im}(f - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - Id)$. Expliciter la matrice Q de q dans la base $\mathcal{B}$.

4. Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q. En déduire M^k pour tout entier naturel k non nul. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} M^k$ (la limite s'entendant coefficient par coefficient).

5. Justifier que M est inversible et exprimer M^{-1} ainsi que M^{-k}, pour tout entier naturel non nul k, en fonction de P et de Q.

Solution :

1. a) $M - I$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

b) $\rightarrow$ Ceci est une propriété générale des endomorphismes φ diagonalisables :

$$E = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Spec}(\varphi)} E_{(\lambda)}(\varphi) = E_{(0)}(\varphi) \oplus \big(\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Spec}(\varphi)\setminus\{0\}} E_{(\lambda)}(\varphi)\big)$$

$\mathrm{Ker}\,\varphi$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 (si 0 est valeur propre) et les éventuels autres sous-espaces propres (qui sont en somme directe) sont contenus dans l'image de φ, car pour $\lambda \neq 0$, $f(x) = \lambda x \implies x = f(\frac{1}{\lambda}x) \in \mathrm{Im}\, f$.
On conclut grâce aux dimensions.

$\rightarrow$ On peut aussi dire, en étant un peu moins général, que pour un endomorphisme φ symétrique, on a même $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et $\mathrm{Im}\,\varphi$ supplémentaires orthogonaux, car pour x quelconque et y dans $\mathrm{Ker}\,\varphi$:

$$\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle = 0$$

$\rightarrow$ Enfin , on peut tout faire à la main et déterminer noyau (droite engendrée par v_1) et image (contient les vecteurs $e_1 - e_k$, pour $k \geqslant 2$ et on conclut grâce aux dimensions).

2. a) Comme $f(v_1) = v_1$, on a $p(v_1) = 0$;
Pour tout $k \geqslant 2$, $f(e_1 - e_k) = -\frac{1}{n-1}(e_1 - e_k)$, donc $e_1 - e_k$ appartient à $\mathrm{Im}(f - Id)$ et $p(e_1) = p(e_k)$.
Ainsi $v_1 = p(v_1) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(e_i)$ et $p(e_i) = \frac{1}{n}v_1$.

b) Ainsi $P = M_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{n}J$, où J est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

3. q est le projecteur associé à p et donc $Q = I - P$.

4. On a : $\alpha P + \beta Q = \frac{\alpha}{n}J + \beta(I - \frac{1}{n}J) = \beta I + \frac{\alpha-\beta}{n}J$, donc
$M = \frac{1}{n-1}(J - I)$ est de la forme $\alpha P + \beta Q$ pour $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{1-n}$

$$M = P + \frac{1}{1-n}Q$$

$\star$ Pour $k \geqslant 2$, on a :

$$M^k = P^k + \frac{1}{(1-n)^k} Q^k = P + \frac{1}{(1-n)^k} Q, \text{ car } P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = QP = 0$$

et le résultat vaut pour $k = 1$ (mais pas pour $k = 0$).

5. $(P + \frac{1}{1-n} Q)(aP + bQ) = I = P + Q$ est vérifié pour $a = 1$ et $\frac{b}{1-n} = 1$, ceci prouve que M est inversible avec $M^{-1} = P + (1-n)Q$.

Et alors, pour $k \geqslant 2$:

$$M^{-k} = (M^{-1})^k = (P + (1-n)Q)^k = P + (1-n)^k Q$$

A nouveau la formule est valide au rang 1, mais pas au rang 0.

Exercice 2.10.

On note :

- F l'espace vectoriel réel des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$;
- E le sous-espace de F formé des fonctions polynômes ; E_n le sous-espace de E formé des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n (où $n \in \mathbb{N}$) ;
- T l'application définie sur F, qui à f associe la fonction $T(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \big(T(f)\big)(x) = f(x+1) - f(x).$$

1. Montrer que T est linéaire et que E est stable par T.

On notera Δ l'endomorphisme de E induit par T.

2. a) Déterminer le noyau de Δ.

b) Montrer que Δ admet une unique valeur propre ; préciser cette valeur propre et l'espace propre associé.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\Delta(E_n) = E_{n-1}$.

b) Justifier que si $Q \in E_{n-1}$, il existe un unique $P \in E_n$ tel que $\Delta(P) = Q$ et $P(0) = 0$.

4. a) Déterminer $A \in E_4$ tel que : $A(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$A(x+1) - A(x) = x^3.$$

b) En déduire la valeur de $S = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $G_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$.

a) Montrer qu'il existe un élément $\varphi \in G_\lambda$ tel que pour tout $x \in]0,1], \varphi(x) = 1$.

b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de T.

Solution :

1. La linéarité de T est claire et si $x \mapsto f(x)$ est polynomiale, il en est de même de $x \mapsto f(x+1) - f(x)$.

2. a) Si f est polynomiale telle que $\Delta f = 0$, alors f est 1-périodique, donc bornée. Si $\deg f \geqslant 1$, la fonction polynomiale f est de limite infinie en $+\infty$, ce qui contredit le fait qu'elle est bornée, donc $\Delta f = 0 \implies f$ est constante. La réciproque est claire, donc :

$$\operatorname{Ker} \Delta = E_0 = \mathbb{R}_0[X]$$

b) Si $\lambda \neq 0$ et f polynomiale non nulle, alors $\Delta f = \lambda f \implies \deg \Delta f = \deg f$. Or si f est non nulle, il est clair que dans le calcul de $f(x+1) - f(x)$ les termes de degré $\deg f$ s'éliminent : il y a une contradiction et seule 0 peut être valeur propre, donc d'après a) :

$$\operatorname{Spec} \Delta = \{0\} \text{ et } E_{(0)}(\Delta) = \operatorname{Ker} \Delta = E_0$$

3. $\star$ On vient de voir que pour $n \geqslant 1$, $\Delta(E_n) \subset E_{n-1}$. Comme le noyau de Δ est de dimension 1 et inclus dans E_n, le théorème du rang donne l'égalité des dimensions et :

$$\Delta(E_n) = E_{n-1}$$

$\star$ L'ensemble des polynômes P de E_n tels que $P(0) = 0$ est un supplémentaire de $E_0 = \operatorname{Ker} \Delta$ dans E_n, donc Δ induit un isomorphisme de cet espace sur E_{n-1}, d'où le résultat.

4. La question précédente montre que A existe et est unique. Par la méthode des coefficients indéterminés, on trouve :

$$A(x) = \frac{1}{4}(x^4 - 2x^3 + x^2) = \frac{1}{4}x^2(x-1)^2$$

Par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = A(n+1) - A(0) = A(n+1) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

5. La relation : $\forall\, x > 0, \varphi(x+1) - \varphi(x) = \lambda \varphi(x)$ s'écrit $\varphi(x+1) = (1+\lambda)\varphi(x)$ et la connaissance de φ sur $]0,1]$ la détermine parfaitement sur $\mathbb{R}_+^*$:

Ainsi φ vaut 1 sur $]0,1]$, vaut $(1+\lambda)$ sur $]1,2]$, $(1+\lambda)^2$ sur $]2,3]$, ...
Par conséquent $\operatorname{Spec} T = \mathbb{R}$.

Exercice 2.11.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A. On rappelle que tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ se factorise sous la forme $P(X) = a \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$, les racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n'étant pas nécessairement deux à deux distinctes.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, Q un polynôme non nul tel que $Q(M) = 0_n$, de degré aussi petit que possible (il n'est pas nécessaire de redémontrer qu'un tel polynôme existe).

a) Montrer que si λ est valeur propre de M, alors $Q(\lambda) = 0$.

b) Soit λ une racine du polynôme Q ; on note alors $Q(X) = Q_1(X)(X-\lambda)$. Montrer que $Q_1(M) \neq 0_n$; en déduire que $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

c) En déduire que $\sigma(M)$ est l'ensemble des racines du polynôme Q.

2. On considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$.

a) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XB$.
Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)X = XP(B)$.

b) En utilisant la question 1, montrer qu'il existe un polynôme Q annulateur de B tel que $Q(A)$ soit inversible.

c) Montrer que l'application $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), X \mapsto AX - XB$ est injective.

d) Soit $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque. Prouver que l'équation $AX - XB = Y$ possède une unique solution X.

3. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $EE(A)$ l'ensemble des nombres complexes λ tels qu'il existe une matrice non nulle X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$AX = \lambda XA.$$

a) Soit $A \in$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $EE(A) \subseteq \left\{\frac{\alpha}{\beta} \text{ tel que } (\alpha, \beta) \in \sigma(A)^2\right\}$.

b) Montrer que la transposée ${}^tA$ d'une matrice diagonalisable est diagonalisable. Déterminer $\sigma({}^tA)$.

c) On suppose que A est inversible et diagonalisable.
Montrer que $EE(A) = \left\{\frac{\alpha}{\beta} \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \sigma(A)^2\right\}$ (on pourra utiliser des matrices construites à l'aide de colonnes propres de A et de ${}^tA$).

Solution :

1. a) Soit C un vecteur colonne propre (donc non nul) pour M, associé à la valeur propre λ.
On a $M^0C = I_nC = C = \lambda^0 C$, $MC = \lambda C$, donc

$$M^2C = MMC = M\lambda C = \lambda MC = \lambda^2 C,$$

et par une récurrence simple, $M^kC = \lambda^k C$, puis par linéarité :

$0 = Q(M)C = Q(\lambda)C$, d'où $Q(\lambda) = 0$, puisque C n'est pas la colonne nulle.

b) On a : $0 = Q(M) = Q_1(M)(M - \lambda I_n)$ et $Q_1(M)$ n'est pas la matrice nulle (sinon cela contrdirait la minimalité du degré du polynôme annulateur Q. Par conséquent $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible et λ est valeur propre de M.

En conclusion l'ensemble des racines de Q est exactement le spectre de M.

2. a) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XB$. On prouve par une récurrence facile que $A^kX = XB^k$ pour tout entier k (même pour $k = 0$). On en tire immédiatement que $P(A)X = XP(B)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

b) D'après 1., on sait qu'il existe un polynôme annulateur $Q = a \prod_{k=1}^{\ell} (X - z_k)$ non nul de B dont toutes les racines $z_1, \dots, z_\ell$ appartiennent à $\sigma(B)$. Comme $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, les points $z_1, \dots, z_\ell$ n'appartiennent pas à $\sigma(A)$ et les matrices $(A - z_k I_n)$ sont donc inversibles.
Or un produit de matrices inversibles étant trivialement inversible, on voit que $Q(A)$ est inversible.

c) T est évidemmment linéaire. Soit $X \in \operatorname{Ker} T$, on a donc $AX = XB$. D'après la question précédente, on sait qu'il existe un polynôme Q qui annule B et tel que $Q(A)$ soit inversible. Avec a) on voit que $Q(A)X = XQ(B) = 0_n$. Par conséquent $X = 0_n$ et le noyau de T est réduit à 0_n. Par suite T est injective.

d) Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie, T est bijective et par suite l'équation $AX - XB = Y$ possède une unique solution X pour chaque matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. a) Soit $\lambda \in EE(A)$ et X une matrice non nulle telle que $AX = \lambda XA$. En posant $B = \lambda A$, on voit que $X \in \operatorname{Ker}(T)$, où T est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ considéré dans la question 2.
On est donc dans le cas où T n'est pas injectif, ce qui implique, d'après 2. c), que $\emptyset \neq \sigma(A) \cap \sigma(\lambda A) = \sigma(A) \cap (\lambda\sigma(A))$.
Il existe donc α et β dans $\sigma(A)$ tels que $\alpha = \lambda\beta$. Ceci termine la question puisque A est inversible et par conséquent $0 \notin \sigma(A)$, donc $\beta \neq 0$.

b) La matrice ${}^tA$ est diagonalisable puisque que si $A = P^{-1}DP$ avec D diagonale, on a : ${}^tA = ({}^tP)D({}^tP)^{-1}$.

Comme $({}^tA - \lambda I) = {}^t(A - \lambda I)$, et comme la transposée d'une matrice inversible est inversible, on voit facilement que $\sigma({}^tA) = \sigma(A)$.

c) Soient A une matrice diagonalisable inversible et $(\alpha, \beta) \in \sigma(A)^2$ (on a donc $\beta \neq 0$). On choisit deux matrices colonnes non nulles X et Y telles que $AX = \alpha X$ et ${}^tAY = \beta Y$. On considère la matrice $B = X{}^tY$ et on vérifie qu'elle est non nulle (colonne $\times$ ligne). On observe que :

$$AB = (AX){}^tY = \alpha X{}^tY = (\frac{\alpha}{\beta})X({}^t(\beta Y)) = (\frac{\alpha}{\beta})X({}^t({}^tAY)) = (\frac{\alpha}{\beta})X{}^tYA$$
$$= (\frac{\alpha}{\beta})BA.$$

On a donc $\left\{\frac{\alpha}{\beta}; (\alpha, \beta) \in \sigma(A)^2\right\} \subset EE(A)$ et par conséquent l'égalité souhaitée en tenant compte de la question a).

Exercice 2.12.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = Id$ l'application identité de E, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est *cyclique d'ordre* p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :
- $f^p(x_0) = x_0$,
- la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E,
- la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée *un cycle* de f.

Soit f un endomorphisme de E cyclique d'ordre p
et soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.

1. Montrer que $p \geqslant n$.

2. Déterminer l'endomorphisme f^p. En déduire que f est inversible.

3. On note m le plus grand des entiers k tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0))$ soit libre. Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$, et qu'il en est de même pour $f^k(x_0)$ pour tout $k > m$.

4. En déduire que $m = n$ et que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

5. Déterminer la forme de la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$ précédente.

6. a) Soit λ une valeur propre de f. Montrer que le sous-espace propre associé est de dimension 1.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Solution :

1. Comme la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de cardinal p, il vient $p \geqslant n$.

2. Cette famille étant génératrice de E, pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0)$. Donc

$$\begin{aligned} f^p(x) &= f^p\Big(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0)\Big) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^{k+p}(x_0) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(f^p(x_0)) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0) = x \end{aligned}$$

Ainsi $f^p = Id$ et f est inversible d'inverse f^{p-1}.

3. La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre maximale, donc la famille $(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0), f^m(x_0))$ est liée. Ainsi, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ complexes

non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^{m} \lambda_k f^k(x_0) = 0$. Si $\lambda_m = 0$, on obtient une contradiction à la liberté de la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$. Donc $\lambda_m \neq 0$, ce qui entraîne que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des éléments de $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

On termine la question par récurrence sur $k \geqslant m$.

4. La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est ainsi libre et génératrice de E ; c'est une base de E et $m = n$

5. Il existe $a_0, \dots, a_{n-1}$ complexes tels que $f^m(x_0) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k(x_0)$.

La matrice associée à f dans la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est la matrice compagnon :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

6. a) On regarde le rang de $M - \lambda I$.
- Comme λ est une valeur propre, ce rang est inférieur ou égal à $n - 1$.
- Par échelonnement, les $(n - 1)$ premières colonnes de $M - \lambda I$ sont libres.

Ainsi le rang est supérieur ou égal à $(n - 1)$.
La matrice $M - \lambda I$ et donc de rang $n - 1$ et $\dim \operatorname{Ker}(M - \lambda I) = 1$.

b) Les sous-espaces propres étant de dimension 1, la matrice M est diagonalisable si et seulement si M admet n valeurs propres distinctes.

Enfin, la méthode du pivot appliquée à $M - \lambda I$ (ou la résolution directe du système définissant les vecteurs propres ...) montre que λ est valeur propre de M si et seulement si λ est racine du polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Ainsi, la matrice M est diagonalisable si et seulement si ce polynôme (qui est scindé) n'admet que des racines simples.

Exercice 2.13.

Dans cet exercice, m est un entier supérieur ou égal à 2. On pose :

$$V_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m & m^2 & \dots & m^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$$

et

$$U_m = \begin{pmatrix} (-1)^m \binom{m}{0} & (-1)^{m-1}\binom{m}{1} & \cdots & (-1)^{m-k}\binom{m}{k} & \cdots & (-1)^0\binom{m}{m} \end{pmatrix}$$

(U_m est donc un élément de $\mathcal{M}_{1,m+1}(\mathbb{R})$).

1. Montrer que pour tout i de $[\![0,m]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_m[X]$ tel que pour tout j de $[\![0,m]\!]$, $L_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Préciser le degré et le coefficient dominant de L_i.

2. Montrer que la famille $\mathcal{L} = (L_0, L_1, L_2, \ldots, L_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_m[X]$. Donner les coordonnées de P dans la base $\mathcal{L}$.

3. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_m[X]$ par $\varphi(P) = P^{(m)}(0)$, où $P^{(m)}$ est la dérivée d'ordre m de P. Montrer que φ est une forme linéaire. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{L}$.

4. Montrer *sans calculs* que la matrice V_m est inversible. Comment pourrait-on calculer V_m^{-1} ?

5. Calculer le produit $U_m V_m$.

Solution :

1. Il s'agit bien entendu des polynômes de Lagrange aux points $0, 1, 2, \ldots, m$, soit :

$$L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{(X-j)}{(i-j)}$$

Pour tout i de $[\![0,m]\!]$, L_i est un polynôme réel de degré m et de coefficient dominant :

$$\frac{1}{(i-0)(i-1)\ldots 1 \ldots (-1)(-2)\ldots(i-m)} = \frac{(-1)^{m-i}}{i!(m-i)!}$$

2. On écrit $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i L_i = 0$, ce qui entraîne que $0 = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i L_i(j) = \alpha_j$. Ainsi la famille $(L_0, L_1 \ldots, L_m)$ est libre et de cardinal $m+1$: c'est une base de $\mathbb{R}_m[X]$, et pour tout P de cet espace :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{m} P(i) L_i$$

3. L'application φ est effectivement une forme linéaire par la linéarité de la dérivation et le fait que la dérivée $m^{\text{ème}}$ de P est une constante. Comme $(X^m)^{(m)} = m!$, pour tout i de $[\![0,m]\!]$, on a :

$$L_i^{(m)}(X) = \frac{(-1)^{m-i} m!}{i!(m-i)!} = (-1)^{m-i}\binom{m}{i}$$

Ainsi la matrice ligne demandée est :

$$\begin{pmatrix} (-1)^m \binom{m}{0} & (-1)^{m-1}\binom{m}{1} & \cdots & (-1)^0\binom{m}{m} \end{pmatrix}$$

4. Les colonnes de la matrice V_m représentent les coordonnées des vecteurs de la famille $(1, X, X^2, \dots, X^m)$ dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_m)$ de $\mathbb{R}_m[X]$. La matrice V_m est donc une matrice de changement de base et, à ce titre, est inversible.

Pour calculer V_m^{-1}, il suffit d'exprimer chaque vecteur L_i dans la base $(1, X, \dots, X^m)$ ce qui revient à développer chaque polynôme L_i suivant les puissances de X.

On obtient des formules dites de Stirling, mais les résultats ne sont pas simples ...

5. La matrice ligne $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad m!)$ représente la matrice associée à la forme linéaire φ dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, \dots, X^m)$ de $\mathbb{R}_m[X]$ (et $\mathbb{R}$ est rapporté à sa base (1)).

La matrice ligne U_m représente φ dans la base $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}_m[X]$ (et $\mathbb{R}$ est toujours rapporté à sa base (1)). Enfin, la matrice V_m est la matrice de passage de la base $\mathcal{L}$ à la base canonique $\mathcal{C}$.

Par la théorie du changement de base, il vient $U_m V_m = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad m!)$.

Exercice 2.14.

Dans cet exercice, $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel et de sa base canonique (qui est donc orthonormée), notée $\mathcal{C}$.
Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{C}$.

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Déterminer le noyau $K = \operatorname{Ker}(f)$ puis une équation et une base $\mathcal{B}'$ de $P = K^{\perp}$.

3. Vérifier que P est stable par f, c'est-à-dire que $f(P) \subseteq P$.
Déterminer la matrice B de l'endomorphisme g de P induit par f, dans la base $\mathcal{B}'$.

4. Montrer plus généralement que si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f, alors $F^{\perp}$ est également stable par f.

5. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de g.

6. En déduire une base orthonormée $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f.

Solution :

1. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable et f est diagonalisable. On sait même que l'on peut construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

2. $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 11x - 5y + 5z = 0 \\ -5x + 3y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}.$

Donc :

$$K = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(0, 1, 1)$$

Par conséquent $P = (\operatorname{Vect}(u))^{\perp}$ est le plan d'équation $y + z = 0$ et on peut choisir pour base $\mathcal{B}'$ de P la famille (v, w) avec $v = (1, 0, 0)$ et $w = (0, 1, -1)$.

3. $Av = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 11v - 5w$ et

$$Aw = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = -10v + 6w$$

Ces calculs montrent que l'image de $\mathcal{B}'$ est une famille de vecteurs de P, donc par linéarité, P est stable par f. De plus :

$$B = M_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Plus généralement, soit F un sous-espace stable et $y \in F^{\perp}$. Alors pour tout vecteur x de E et avec des notations évidentes :
$\langle x, f(y)\rangle = {}^tX(AY) = {}^t(AX)Y = \langle f(x), y\rangle = 0$, puisque $f(x) \in F$ est orthogonal à y. Ainsi $f(y)$ est orthogonal à F et $F^{\perp}$ est stable par f.

5. $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (11 - \lambda)x - 10y = 0 \\ -5x + (6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$

Le déterminant de ce système vaut $(11 - \lambda)(6 - \lambda) - 50 = \lambda^2 - 17\lambda + 16$.

Les valeurs propres de B (donc de g) sont 1 et 16 et facilement

$$E_{(1)}(B) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ E_{(16)}(B) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Soit : $\begin{cases} E_{(1)}(g) = \operatorname{Vect}(v + w) = \operatorname{Vect}(1, 1, -1) \\ E_{(16)}(g) = \operatorname{Vect}(2v - w) = \operatorname{Vect}(2, -1, 1) \end{cases}$

6. Pour achever le travail, il n'y a plus qu'à normaliser (on avait pris la précaution de prendre v et w orthogonaux) :

$$\mathcal{B} = \big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \tfrac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)\big)$$

Exercice 2.15.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. On suppose que A est une matrice symétrique réelle.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, *on pose* $f(\varepsilon_k) = \lambda_k \varepsilon_k$.

Montrer que l'on peut supposer $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$.

Cette hypothèse est supposée réalisée dans la suite de cet exercice.

On note $P = (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de passage de la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

2. Calculer, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_{i,j}^2$, puis pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j}^2$.

3. a) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]^2$, $p_{i,j} = \langle e_i, \varepsilon_j\rangle$.

b) Établir que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = \langle e_i, f(e_i)\rangle$ puis en déduire que :

$$a_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_i, \varepsilon_j\rangle^2$$

4. a) Montrer que, pour tout k de $[\![1, n]\!]$: $a_{i,i} \leqslant \lambda_k + \sum\limits_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k)\langle e_i, \varepsilon_j\rangle^2$.

b) En déduire que pour tout k de $[\![1, n]\!]$: $\sum\limits_{i=1}^{k} a_{i,i} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Solution :

1. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable. Par conséquent, f est diagonalisable dans une base orthonormale (en tant qu'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$). De plus si on effectue une permutation des vecteurs de cette nouvelle base, on ne change pas son caractère orthonormé. On peut donc ordonner les valeurs propres associées dans tout ordre voulu.

2. La matrice de passage est orthogonale et les deux égalités ${}^tPP = I$ et $P\,{}^tP = I$ donnent, en revenant à la définition du produit matriciel, les égalités demandées. On peut aussi dire que les colonnes de P et de ${}^tP$ sont de norme 1.

3. a) On sait que $\varepsilon_j = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{k,j} e_k$. Il reste à utiliser le fait que la base canonique est orthonormale : $\langle e_i, \varepsilon_j\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{k,j} \langle e_i, e_k\rangle = p_{i,j}$

b) On a : $f(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} e_j$. Donc $a_{i,i} = \langle e_i, f(e_i)\rangle$.

De plus, comme $P^{-1} = {}^t P$ est la matrice de passage de la base ε à la base e, on a :

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} ({}^t P)_{k,i}\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k}\varepsilon_k$$

On en déduit :

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} f(\varepsilon_k) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_k\rangle \lambda_k \varepsilon_k$$

Donc :

$$a_{i,i} = \langle e_i, \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_k\rangle \lambda_k \varepsilon_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_i, \varepsilon_k\rangle^2$$

4. a) Ainsi :

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle e_i, \varepsilon_j\rangle^2 + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j \langle e_i, \varepsilon_j\rangle^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle e_i, \varepsilon_j\rangle^2 + \lambda_k \sum_{j=k+1}^{n} \langle e_i, \varepsilon_j\rangle^2 \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle e_i, \varepsilon_j\rangle^2 + \lambda_k (1 - \sum_{j=1}^{k} \langle e_i, \varepsilon_j\rangle^2) \leqslant \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k) \langle e_i, \varepsilon_j\rangle^2 + \lambda_k \end{aligned}$$

b) Par sommation, il vient :

$$\sum_{i=1}^{k} a_{i,i} \leqslant \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k) \sum_{i=1}^{k} \langle e_i, \varepsilon_j\rangle^2 + k\lambda_k$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} a_{i,i} &\leqslant \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k) \sum_{i=1}^{k} p_{i,j}^2 + k\lambda_k \leqslant \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k) \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}^2 + k\lambda_k \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k) + k\lambda_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \end{aligned}$$

Exercice 2.16.

Soit $E = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, muni de sa structure euclidienne canonique, pour laquelle la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée, le produit scalaire associé est noté $\langle ., . \rangle$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice M relativement à la base $\mathcal{B}$, on note ${}^t u$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est ${}^t M$.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on désigne par $\sigma(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.

0. Vérifier que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$\forall\, x, y \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, {}^t u(y)\rangle$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que pour tout vecteur x de E, on a :

$$\|u(x)\| \leq \|x\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2}$$

En déduire que la quantité $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \{\|u(x)\|\}$ est bien définie et appartient à $\mathbb{R}^+$.

On note $\|u\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \{\|u(x)\|\}$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\|u(x)\| \leqslant \|u\|\|x\|$ pour tout $x \in E$. Prouver que $\|u \circ v\| \leqslant \|u\|\|v\|$, pour tout couple $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

Si u et v sont deux endomorphismes sur E et α un nombre réel, montrer que l'on a les propriétés suivantes :

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \,;\, \|\alpha u\| = |\alpha|\|u\| \text{ et } \|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$$

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que ${}^t u \circ u$ est diagonalisable dans une base orthonormée de E et que $\sigma({}^t u \circ u) \subseteq \mathbb{R}^+$.

En déduire que $\|u\| = \max\left\{\sqrt{\lambda} \ / \ \lambda \in \sigma({}^t u \circ u)\right\}$ et qu'il existe un vecteur unitaire e de E tel que $\|u\| = \|u(e)\|$.

Solution :

0. On écrit, avec des notations matricielles évidentes :

$$\langle u(x), y\rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX({}^tMY) = \langle x, {}^tu(y)\rangle$$

1. Avec l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\|u(x)\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)\Big\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\|u(e_i)\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2}$$
$$= \|x\|\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2}$$

L'ensemble $\{\|u(x)\|; \|x\| \leqslant 1\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^+$, majorée par $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2}$, elle admet donc une borne supérieure positive.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $x = 0$, l'inégalité souhaitée est évidente, sinon il suffit de remarquer que le vecteur $x/\|x\|$ est dans la boule unité et par conséquent que $\|u\| \geqslant \|u(x/\|x\|)\| = \|u(x)\|/\|x\|$.

En utilisant l'inégalité précédente, on voit que $\|u(v(x))\| \leqslant \|u\|\|v(x)\| \leqslant \|u\|\|v\|\|x\|$, et il suffit alors de prendre la borne supérieure sur la boule unité pour obtenir $\|u \circ v\| \leqslant \|u\|\|v\|$.

Si u et v sont deux endomorphismes de E et α un nombre réel, les propriétés : $\|u+v\| \leqslant \|u\|+\|v\|$ et $\|\alpha v\| = |\alpha|\|u\|$ découlent immédiatement des propriétés des bornes supérieures.
L'implication $\|u\| = 0 \implies u = 0$ résulte de la première inégalité prouvée dans cette question et l'autre implication est évidente.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\langle {}^tu \circ u(x), y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, {}^tu \circ u(y)\rangle$. L'endomorphisme ${}^tu \circ u$ est donc symétrique et par conséquent diagonalisable dans une base orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E (on peut aussi dire que la matrice ${}^tMM$ est clairement symétrique ...).

Si $\lambda \in \sigma({}^t u \circ u)$ et si x est un vecteur propre unitaire associé à λ, on a
$$0 \leqslant \|u(x)\|^2 = \langle {}^t u \circ u(x), x\rangle = \lambda\|x\|^2 = \lambda$$
et par suite $\sigma({}^t u \circ u) \subseteq \mathbb{R}^+$.
(on peut aussi écrire, avec $X \neq 0$:
${}^t MMX = \lambda X \implies {}^t X {}^t MMX = \|MX\|^2 = \lambda\|X\|^2 \implies \lambda \neq 0$).

Si on note λ_i la valeur propre associé au vecteur propre ε_i et λ_{i_0} la plus grande valeur propre, on voit que
$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 \leqslant \lambda_{i_0} \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \lambda_{i_0}\|x\|^2.$$
On en déduit que $\|u\| \leqslant \sqrt{\lambda_{i_0}}$ et comme on a $\|u(\varepsilon_{i_0})\|^2 = \lambda_{i_0}$, il en résulte que
$$\|u\| = \max\{\sqrt{\lambda}; \lambda \in \sigma({}^t u \circ u)\}$$
et qu'il existe bien un vecteur unitaire $e = \varepsilon_{i_0}$ de E tel que $\|u\| = \|u(e)\|$.

Exercice 2.17.

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞. Soit un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $f_k \in E$ par :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_k(x) = x^k \mathrm{e}^{\alpha x}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

1. Déterminer la dimension de E_n.

Montrer que l'application $D_n : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E_n, où f' désigne la dérivée de f.

2. a) Montrer que D_n est bijectif si et seulement si $\alpha \neq 0$.

b) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'endomorphisme $P(D_n)$ est bijectif si et seulement si α n'est pas racine de P.

c) Soient deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que $Q(\alpha) \neq 0$, et soit le polynôme $R = PQ$. Montrer que :
$$\operatorname{Ker} R(D_n) = \operatorname{Ker} P(D_n)$$

3. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que la matrice de l'endomorphisme $P(D_n)$ dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est :
$$M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \text{ , avec } m_{i,j} = \begin{cases} \binom{j}{i} P^{(j-i)}(\alpha) & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ du polynôme P.

Attention : *contrairement aux conventions habituelles, la numérotation des lignes et des colonnes commence à* 0.

En déduire que si r est la multiplicité de α comme racine de P, alors :

$$\operatorname{Im} P(D_n) = E_{n-r} \text{ et } \operatorname{Ker} P(D_n) = E_{r-1}$$

4. Trouver une fonction $f \in E$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'''(x) - 2\alpha f''(x) + \alpha^2 f'(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

Solution :

1. Pour tout $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$, on a pour tout x réel : $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n x^n = 0$.

Le polynôme $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n X^n$ a donc une infinité de racines, donc est nul. Ainsi $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$. La famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre, donc est une base de E_n et $\dim E_n = n+1$.

La linéarité de la dérivation est connue. De plus, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on a :

$$D_n(f_k) = \begin{cases} \alpha f_k + k f_{k-1} & \text{si } k \geqslant 1 \\ \alpha f_k & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Donc, pour tout $f \in E_n$, on a $D_n(f) \in E_n$, ce qui règle le côté «endo» de la chose.

2. a) D'après la question précédente, la matrice de D_n dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est :

$$M_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & n \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$$

Comme M_n est triangulaire supérieure, elle est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$.

b) La matrice de $P(D_n)$ dans la même base est $P(M_n) = \begin{pmatrix} P(\alpha) & & \\ 0 & \ddots & \\ & & P(\alpha) \end{pmatrix}$, donc inversible si et seulement si $P(\alpha) \neq 0$.

c) Comme $R = QP$, on a : $R(D_n) = Q(D_n) \circ P(D_n)$. D'après la question 2. b), l'endomorphisme $Q(D_n)$ est bijectif. On a donc :

$$R(D_n)(f) = 0 \Longleftrightarrow Q(D_n)(P(D_n)(f)) = 0 \Longleftrightarrow P(D_n)(f) = 0$$

3. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ on a : $(D_n - \alpha Id)(f_k) = k f_{k-1}$ (à condition de poser $f_0 = 0$). Par récurrence, pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a :

$$(D_n - \alpha Id)^j (f_k) = k(k-1)\cdots(k-j+1) f_{k-j} \text{ si } k \geqslant j, \text{ 0 sinon}$$

En particulier, si $j > n$, on voit que $(D_n - \alpha Id)^j = 0$. D'après la formule de Taylor quel que soit le degré de P on en déduit que :

$$P(D_n) = P(\alpha) Id + P'(\alpha)(D_n - \alpha Id) + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(D_n - \alpha Id)^n$$

Donc, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ on a avec $\dfrac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!} = \dbinom{k}{j}$:

$$\begin{aligned} P(D_n)(f_k) &= P(\alpha) f_k + P'(\alpha) k f_{k-1} + \cdots \\ &= P(\alpha) f_k + \binom{k}{1} P'(\alpha) f_{k-1} + \cdots + \binom{k}{k} P^{(k)}(\alpha) f_0 \end{aligned}$$

D'où la matrice annoncée.

On sait que la multiplicité est caractérisée par :

α racine d'ordre $r \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$

d'où les résultats annoncés en observant la matrice (échelonnée) M précédente.

4. Si $\alpha = 0$ la relation s'écrit $f'''(x) = 1$, donc $f(x) = \dfrac{x^3}{6}$ convient. Si $\alpha \neq 0$, et si on cherche f dans E_n, où la relation s'écrit :

$$P(D_n)(f) = f_0 \text{ avec } P = X(X-\alpha)^2$$

Comme α est racine double de P, on sait que $\operatorname{Im} P(D_n) = E_{n-2}$.

Le problème admet donc une solution $f \in E_2$ c'est-à-dire de la forme

$$f = af_0 + bf_1 + cf_2.$$

D'après la question 3, la matrice de $P(D_2)$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et la relation voulue est équivalente à $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc les solutions sont $c = \dfrac{1}{2\alpha}$ et a, b quelconques et $f = \dfrac{1}{2\alpha} f_2$ convient.

Exercice 2.18.

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. Justifier que A est diagonalisable.

On note alors D une matrice diagonale semblable à A.

2. Déterminer un polynôme annulateur Q de D, unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) et de degré minimum.
En déduire un polynôme annulateur de A ayant les mêmes propriétés.

3. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ engendré par la famille $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. Comparer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$.

Solution :

1. $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{cases}(1-\lambda)x+y-z=0\\x+(1-\lambda)y+z=0\\x+y+(1-\lambda)z=0\end{cases}$

$$\iff\begin{cases}x+y+(1-\lambda)z=0\\-\lambda y+\lambda z=0\\(1-\lambda)x+y-z=0\end{cases}$$

$\star$ $\lambda=0$ donne $\begin{cases}x+y+z=0\\x+y-z=0\end{cases}$, soit $\begin{cases}z=0\\y=-x\end{cases}$

$$0 \text{ est valeur propre et } E_{(0)}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$\star$ Si $\lambda\neq 0$, le système devient : $\begin{cases}y=z\\x+(2-\lambda)z=0\\(1-\lambda)x=0\end{cases}$

Pour $\lambda=1$, il reste $\begin{cases}y=z\\x+z=0\end{cases}$, sinon $x=0$ et pour $\lambda=2$, il reste $y=z$.
Ainsi 1 et 2 sont les autres valeurs propres, avec :

$$E_{(1)}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\text{ et }E_{(2)}=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

A est diagonalisable, car carrée d'ordre trois admettant trois valeurs propres.

2. Pour $P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ et $D=\mathrm{diag}(0,1,2)$, on a $A=PDP^{-1}$, d'où pour tout polynôme R :

$$R(A)=PR(D)P^{-1} \text{ et } R(A)=0\iff R(D)=0.$$

et comme $R(D)=\mathrm{diag}(R(0),R(1),R(2))$, **la** solution est le polynôme

$$Q=X(X-1)(X-2)$$

3. On a $Q(A)=0$, donc en développant $A^3=3A^2-2A\in\mathrm{Vect}(I,A,A^2)$. Par une récurrence simple, $k\geqslant 3\implies A^k\in\mathrm{Vect}(I,A,A^2)$ et $\mathcal{E}=\mathrm{Vect}(I,A,A^2)$.

De plus comme il n'existe pas de polynôme de degré 2 annulateur de A, la famille précédente est libre, donc est une base de $\mathcal{E}$. Soit :

$$\dim\mathcal{E}=3$$

4. $MA=AM\iff MPDP^{-1}=PDP^{-1}M\iff P^{-1}MPD=DP^{-1}MP$.
En posant $N=P^{-1}MP$, on voit aisément que les solutions de l'équation $ND=DN$ sont les matrices diagonales, qui forment un espace de dimension 3., donc :

$$\mathcal{C}=\{P\,\mathrm{diag}(a,b,c)P^{-1},(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}$$

Cet espace est donc aussi de dimension 3, et comme I, A, A^2 commutent avec A :

$$\mathcal{C} = \mathcal{E}$$

Exercice 2.19.

Dans cet exercice, $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel, celui pour lequel la base canonique $\mathcal{C}$ est orthonormée.

Soit la matrice : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique.

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

On note D (respectivement P) le sous-espace propre de f de dimension 1 (respectivement 2). Soit u et v les projections orthogonales de $\mathbb{R}^3$ sur D et P respectivement.

2. Vérifier que D et P sont orthogonaux.

3. Que valent $u + v$ et $u \circ v$?

4. Montrer qu'il existe des polynômes réels R et Q tels que $u = R(f)$ et $v = Q(f)$.
Déterminer de deux façons les matrices U et V des endomorphismes u et v respectivement, dans la base $\mathcal{C}$.

5. Calculer les valeurs de $\text{rg}(U)$, $\text{rg}(V)$, puis déterminer les matrices $U + V$ et UV. Expliquer pouquoi les matrices U et V sont symétriques.

Solution :

1. La matrice A est symétrique réelle, donc A (et aussi f) est diagonalisable, et on peut même choisir la matrice de passage diagonalisante orthogonale.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (7-3\lambda)x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + (7-3\lambda)y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + (7-3\lambda)z = 0 \end{cases}$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ donne $3(3-\lambda)(y+z) = 0$ et la discussion est alors banale :

$\star$ Si $\lambda = 3$, le système se réduit $2x + 2y - 2z = 0$, donc 3 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est le plan P d'équation $x + y - z = 0$ que l'on peut engendrer par les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(1, -2, -1)$ (on a pris la précaution de les prendre orthogonaux).

$\star$ Si $\lambda \neq 3$, L_2 donne donc $z = -y$ et le système devient :

$$\begin{cases} (7-3\lambda)x - 4y = 0 \\ z = -y \\ 2x + (3\lambda - 5)y = 0 \end{cases}$$

$(7-3\lambda)(3\lambda-5)+8 = 9(3-\lambda)(\lambda-1)$, donc la dernière valeur propre de f est 1 le sous-espace propre étant la droite D dirigée par le vecteur $(1,1,-1)$.

Pour $H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, on a ${}^tH = H^{-1}$ et $A = P\,\mathrm{diag}(1,3,3)\,{}^tP$

2. On sait que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

3.On a $D \oplus^{\perp} P = \mathbb{R}^3$, donc u et v sont les deux projecteurs associés à une somme directe et $u + v = Id$, $u \circ v = v \circ u = 0$.

4. Dans la base $\mathcal{B}$ orthonormée obtenue dans la question 1. (voir les colonnes de H), on a :

$U' = M_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(1,0,0)$. Avec $D = \mathrm{diag}(1,3,3)$, on a :

$$U' = R(D) \Longleftrightarrow \begin{cases} R(1) = 1 \\ R(3) = 0 \end{cases}$$

$V' = M_{\mathcal{B}}(v) = \mathrm{diag}(0,1,1)$ et on a $V' = Q(D) \Longleftrightarrow \begin{cases} Q(1) = 0 \\ Q(3) = 1 \end{cases}$

On peut donc prendre $R = -\frac{1}{2}(X-3)$ et $Q = \frac{1}{2}(X-1)$.

Par la théorie du changement de base, on a donc $U = R(A)$ et $V = Q(A)$ ou $U = HU'\,{}^tH$ et $V = HV'\,{}^tH$, d'où :

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ V = I_3 - U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. On a $\mathrm{rg}\,U = \mathrm{rg}\,u = 1$, $\mathrm{rg}\,V = \mathrm{rg}\,v = 2$, $U + V = I_3$, $UV = VU = 0$.

Les matrices U et V sont symétriques, car elles traduisent dans une base orthonormée des projecteurs orthogonaux, ces projecteurs sont donc des endomorphismes symétriques.