Soit $\mathcal{E}$ une base de $\mathbb{R}^2$, et u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que la matrice associée à u dans $\mathcal{E}$ soit

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, déterminer l'équation du second degré que doivent vérifier les valeurs propres de U.

2. En déduire que $a+d$ et $ad-bc$ ne dépendent pas de la base $\mathcal{E}$, mais uniquement de l'endomorphisme u.

3. Calculer $U^2-(a+d)U+(ad-bc)I_2$, où I_2 représente la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. On suppose que $a+d \neq 0$. Montrer que si U^2 est diagonalisable, alors U l'est également. Ce résultat est-il encore vrai si $a+d=0$?

On désigne par Φ l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$(\forall\ P \in \mathbb{R}[X]) \qquad \Phi(P) = (X^2 - 1)\, P'' + (2X + 1)\, P'$$

Soit n un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. a) Vérifier que la restriction de Φ à E_n est un endomorphisme de E_n, noté Φ_n.

b) Exprimer la matrice de Φ_n dans la base canonique $\big(1, X, X^2, \ldots, X^n\big)$ de E_n.

c) Déterminer les valeurs propres de Φ_n. L'endomorphisme Φ_n est-il diagonalisable ?

d) Montrer que, pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme H_k de degré k et de coefficient dominant égal à 1, qui est vecteur propre de Φ_n.

2. a) Justifier (brièvement) que :

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, P(x)\, Q(x) dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) En observant que :

$$(x^2 - 1)\, P''(x) + 2x\, P'(x) = \frac{d}{dx}\big[(x^2 - 1)\, P'(x)\big]$$

montrer que, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$\big(\Phi(P) \mid Q\big) = \int_{-1}^{1} (1-x)^{3/2}\, (1+x)^{1/2}\, P'(x)\, Q'(x) dx$$

c) En déduire que la famille $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de E_n.

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$F(x,y,z) = 24x^2 + 2y^2 + z^2 + 12xy + 2yz + 4zx - 240x - 48y - 12z$$

a) Déterminer les points critiques de F.

b) Montrer que :

$$F(x,y,z) = (2x+y+z-6)^2 + (4x+y-18)^2 + 4(x-9)^2 - 684$$

c) Montrer que F atteint son minimum sur $\mathbb{R}^3$ en un unique point. Préciser ses coordonnées, ainsi que la valeur du minimum.

2. a) Rappeler la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^n dt$.

b) Justifier la convergence et exprimer en fonction de F, l'intégrale :

$$I(a,b,c) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(t^3 - a\,t^2 - b\,t - c\right)^2 dt$$

c) Déterminer :

$$I = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} I(a,b,c)$$

3. a) Justifier (brièvement) que :

$$\left(P \mid Q\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, P(t)\, Q(t) dt$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

b) Calculer la distance du polynôme $P_0(X) = X^3$ au sous-espace $H = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 2.

c) Soit $T(X) = a\,X^2 + b\,X + c$ un polynôme appartenant à H.
Montrer que T est la projection orthogonale du polynôme X^3 sur le sous-espace H si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) & = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) & = & 0 \end{array}\right.$$

et retrouver le résultat précédent.

On considère l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $p \geqslant 2$, à coefficients réels.

Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note par ${}^tA$ la matrice transposée de A.

Si $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on pose :

$$< u \mid v >= u_1 v_1 + \cdots + u_p v_p.$$

Si $u \in \mathbb{R}^p$, on note $\|u\|$ la norme euclidienne du vecteur u .

1. a) Montrer que la matrice ${}^tAA$ est symétrique et que ses valeurs propres sont positives. On notera c sa plus grande valeur propre.

b) Montrer que $\|Ax\|^2 \leqslant c\,\|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$. En déduire que pour tout couple de vecteurs x et y de $\mathbb{R}^p$ et pour tout entier $k > 0$, on a :

$$(*) \qquad \left|< A^k x \mid y >\right| \leqslant c^{\frac{k}{2}}\,\|x\|\,\|y\|$$

On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $U \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si chaque coefficient de U_n converge, lorsque n tend vers l'infini, vers le coefficient correspondant de la matrice U. On note ε_j le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

2. a) Soient $(i,j) \in \{1,\dots,p\}^2$. En utilisant la relation $(*)$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{< A^k \varepsilon_i \mid \varepsilon_j >}{k!}$ est convergente.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la matrice B_n par :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

Montrer que la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une matrice que l'on notera $\exp(A)$.

c) Montrer que si λ est une valeur propre de A, alors e^{λ} est une valeur propre de $\exp(A)$.

d) Calculer $\exp(A)$ lorsque A est une matrice diagonale.

On considère l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $p \geqslant 2$ à coefficients réels. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

1. a) Montrer que l'on a :

$$\begin{cases} \operatorname{Ker}(B) \subseteq \operatorname{Ker}(AB) \\ \operatorname{Im}(AB) \subseteq \operatorname{Im}(A) \end{cases}$$

b) Montrer que si le produit AB est inversible, alors les matrices A et B sont inversibles.

2. Soit λ un réel non nul.

a) Montrer que la matrice $(\lambda I - AB)$ est inversible si et seulement si la matrice $(\lambda I - BA)$ l'est.

b) On suppose dans cette question que λ n'est pas valeur propre de la matrice AB. Montrer que l'on a alors :

$$(\lambda I - AB)^{-1} = \frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda}(\lambda I - BA)^{-1}B$$

c) Montrer que les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

3. On considère les matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice BA.

b) Calculer, après avoir justifié son existence, l'inverse de la matrice $I - AB$.

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$ et $H = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2, \ a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

1. Montrer que H est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $q(X) = {}^tXHX$.

a) Vérifier que $q(X) = \displaystyle\int_0^1 (x_1 + x_2 t + \dots + x_n t^{n-1})^2 dt$.

b) En déduire que les valeurs propres de H sont strictement positives et que H est inversible.

c) Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXH^{-1}X \geq 0$, et que ${}^tXH^{-1}X = 0$ si et seulement si $X = 0$.

3. On note $||X|| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, a_n la plus petite valeur propre de H et b_n la plus grande valeur propre de H.

a) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $a_n ||X||^2 \leq q(X) \leq b_n ||X||^2$.

b) On note $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à H et on admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

Montrer que $na_n \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

c) On considère la suite (h_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

Montrer que la suite $(h_n - \ln n)$ est convergente. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et f, g, h trois endomorphismes de E tels que :

$$f \circ g = h,\ \ g \circ h = f,\ \ h \circ f = g$$

1.a) Comparer les images de ces trois endomorphismes ainsi que leurs noyaux.

b) Montrer que $f^2 = g^2 = h^2$ et, en calculant $h^2 \circ f \circ h^2$, montrer que $f^5 = f$.

c) Montrer que les noyaux des puissances de f sont tous égaux et en déduire que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

2. On suppose maintenant que f, g, h sont de rang n.

a) Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?
Montrer que les sous-espaces propres de f (s'il y en a) sont stables par g et par h.

On suppose désormais que f est un endomorphisme symétrique.
b) Montrer que $f^2 = I_E$ (l'endomorphisme identité de E) et que f, g, h commutent deux à deux.

c) En déduire que f, g, h admettent une base commune de vecteurs propres.

Soit a un réel strictement positif et E l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0, a]$. On considère les fonctions s et c de E définies pour tout $x \in [0, a]$ par $s(x) = \sin(x)$ et $c(x) = \cos(x)$. On définit en outre l'application Φ de E dans E par :

$$\forall (x, f) \in [0, a] \times E,\ \Phi(f)(x) = \int_0^a f(t) \sin(x+t) dt$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

2. Montrer que $(\Phi(s), \Phi(c))$ est un système libre de E.

3. Déterminer $\operatorname{Im} \Phi$.

4. On suppose désormais que $a = \pi/2$. Déterminer les valeurs propres non nulles de Φ ainsi que les sous-espaces propres associés.

5. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par s et c. Montrer que la restriction de Φ à F est un endomorphisme de F. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Soit E l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n, ($n \geq 2$) formé des matrices $A = (a_{i,j})$ vérifiant :
il existe un réel unique noté $m(A)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = m(A)$$

On considère en outre la matrice $J = (j_{p,q})$ de E définie par :
pour tout $(p,q) \in \{1, \ldots, n\}^2, j_{p,q} = 1$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $A.J$ et $J.A$ pour $A \in E$. En déduire que E est stable par la multiplication des matrices et que l'application $m : A \mapsto m(A)$ est une application linéaire de E sur $\mathbb{R}$.

2. Soit G la droite vectorielle engendrée par J et soit $H = \operatorname{Ker} m$ le noyau de m. Montrer que $E = G \oplus H$. (on pourra considérer la matrice $A - \left(\dfrac{m(A)}{n}\right) J$, pour $A \in E$).

3. Pour tout couple $(k,l) \in \{2, \ldots, n\}^2$, on considère la matrice $H^{k,l}$ dont tous les éléments sont nuls excepté :

$$h_{1,1}^{k,l} = h_{k,l}^{k,l} = 1, \text{ et } h_{1,l}^{k,l} = h_{k,1}^{k,l} = -1$$

Montrer que pour tout couple $(k,l) \in \{2, \ldots, n\}^2, H^{k,l}$ est élément de H et que l'ensemble des matrices $(H^{k,l})$ forme une base de H (si $A = (a_{i,j}) \in H$, on pourra considérer la matrice $A' = \displaystyle\sum_{2 \leq k,l \leq n} a_{k,l} H^{k,l}$).

En déduire la dimension de E.

Soit n un entier naturel supéreur ou égal à 2. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. On identifiera $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices colonne à coefficients réels.

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n vérifiant :

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geq 0, \;$ et $\; {}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0.$

1. Montrer que les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs.

Soit C un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixé. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$f(X) = \langle AX, X\rangle - 2\langle C, X\rangle$$

2. Déterminer les points critiques de f.

3. Déterminer la nature de ces points.

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Dans tout l'exercice, E désigne un espace vectoriel de dimension n, et f est un endomorphisme de E.
Par convention $f^0 = id$ (application identité) et on définit par récurrence pour $k \in \mathbb{N}^*$, f^k par $f^k = f \circ f^{k-1}$
On dira que f est cyclique s'il existe un vecteur x_0 de E tel que :

$$\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$$

soit une base de E.

1. Montrer que si f est cyclique, alors $(id, f, \ldots, f^{n-1})$ est une famille libre d'endomorphismes de E.

2. Indiquer à quelles conditions un projecteur de E est cyclique.

3. Dans cette question, on suppose que E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$, et on considère l'endomorphisme d de E défini par : $\forall\, Q \in E$,

$$d(Q)(X) = Q(X+1) - Q(X)$$

a) Que peut-on dire du degré de $d(Q)$ relativement à celui de Q ?

b) Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme d. Est-il diagonalisable ?

c) L'endomorphisme d est-il cyclique ?

4. On suppose dans cette question que f admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs propres respectivement associés. Montrer à l'aide du vecteur $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k$ que f est cyclique.

5. On suppose dans cette question que f est diagonalisable et admet p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ avec $p < n$. On pose

$$P(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$$

a) Calculer $P(f)(x)$ lorsque x est un vecteur appartenant à l'un des sous-espaces propres de f.

b) En déduire que $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

c) f est-t-il cyclique ?

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Si $a = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on note M_a la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1 \\ a_{i-1} & \text{si } j = n \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

On note P_a le polynôme défini par : $P_a(X) = X^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

1. Soit λ une valeur propre de M_a. Déterminer le rang de la matrice $M_a - \lambda I_n$. En déduire la dimension du sous-espace propre associé.

2. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, λ est valeur propre de M_a si et seulement si $P_a(\lambda) = 0$.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur P_a pour que M_a soit diagonalisable.

4. On pose $Q(X) = (X+1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$. Montrer que Q possède une racine multiple si et seulement si n est multiple de 6.

5. On prend dans cette question $a = \left(0, -\dfrac{C_{n+1}^1}{n+1}, \ldots, -\dfrac{C_{n+1}^{n-1}}{n+1}\right)$, où C_m^p désigne le coefficient binomial habituel. Pour quelles valeurs de n la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la norme associée étant notée $\| \cdot \|$.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E tels que :

$$\begin{cases} \forall\, i \in [\![1, n]\!], \|x_i\| = 1 \\ \forall\, i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j \implies \|x_i - x_j\| = 1 \end{cases}$$

1. Calculer, pour tout couple d'indices i et j, $\langle x_i, x_j \rangle$.

2. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice carrée d'ordre n, de terme générique $a_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$. Montrer que A est inversible et en déduire que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Soit n un entier supérieur ou égal à deux et E un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

Pour tout x de E on pose : $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

1. a) L'application F est-elle un endomorphisme de E ?

   b) L'application F est-elle injective, surjective ?

   c) L'application F est-elle un endomorphisme symétrique de E ?

   d) Caractériser les bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ telles que F soit un projecteur.

2. a) Montrer que les valeurs propres de F sont strictement positives.

   b) Montrer qu'il existe un automorphisme symétrique s de E à valeurs propres strictement positives tel que $s = (s \circ F)^{-1}$.

   c) Montrer que $\big(s(e_1), s(e_2), \ldots, s(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que $A^n = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Le but de cet exercice est de montrer que $A^{12} = I_2$.

On note σ l'ensemble des valeurs propres (réelles ou complexes) de A.

1. Montrer que $\lambda \in \sigma$ si et seulement si $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$. En déduire que σ n'est pas vide.

On admettra que la matrice A vérifie la relation : $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$ $(\star)$.

2. Montrer que σ vérifie l'une, et l'une seulement, des deux propositions suivantes :

   a) $\sigma \subseteq \{-1, 1\}$

   b) il existe un entier p tel que $1 \leq p < n/2$ et $\sigma = \{e^{-2ip\pi/n}, e^{2ip\pi/n}\}$

Que peut-on dire, dans ce cas, du nombre $2\cos(2p\pi/n)$?

3. On suppose que $\mathrm{card}(\sigma) = 2$. En étudiant les différents cas, montrer que $A^{12} = I_2$.

4. On suppose que $\sigma = \{1\}$ et que $A \neq I_2$.

   a) En utilisant la relation $(\star)$, montrer que $\mathrm{Ker}(A - I_2) = \mathrm{Im}(A - I_2)$

   b) En déduire que A est semblable à :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   c) Calculer T^k, pour $k \geq 1$. En déduire une contradiction.

5. Montrer que si $\sigma = \{-1\}$ et $A \neq -I_2$, on arrive également à une contradiction.

Conclure.

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels. Pour P et Q dans E, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t) Q(t)\, dt$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^3 + xt^2 + yt + z)^2\, dt$

Montrer qu'il existe un unique triplet (x_0, y_0, z_0) tel que f présente en (x_0, y_0, z_0) un minimum absolu et déterminer ce triplet.

1. Dans cette question, on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E.
On note p_1 et p_2 les endomorphismes de E de matrices respectives :
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dans la base } \mathcal{B}.$$
Montrer que $p = p_1 + p_2$ est un projecteur de E et que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Les endomorphismes p_1 et p_2 sont-ils des projecteurs de E ?

Dans toute la suite, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

2. On appelle trace d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et l'on note $\mathrm{tr}(M)$, la somme de ses coefficients diagonaux.

Montrer que l'application tr est une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ et que, pour tout couple $(A, B) \in [\mathcal{M}_n(\mathbb{R})]^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Soit f un endomorphisme de E. Montrer que, quelles que soient les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, les matrices respectives M et M' de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même trace.

Cette trace, qui ne dépend donc que de f, est appelée trace de f.

3. Montrer que la trace d'un projecteur de E est égale à son rang.

4. Soit un entier $m \geqslant 2$. On considère des endomorphismes $f_1, f_2, \ldots, f_m$ de E vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{m} f_i = id_E$.
Montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :
 (i) pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\}^2$ vérifiant $i \neq j$, $f_i \circ f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$;
 (ii) pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, f_i est un projecteur de E ;
 (iii) $\sum\limits_{i=1}^{m} \mathrm{rg}\ f_i \leqslant n$;
 (iv) $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\, f_i$.

(*On pourra montrer que (ii) implique (iii) à l'aide de l'application trace.*
Pour établir que (iii) implique (iv), on pourra commencer par montrer que
$$\mathrm{Im}(f_1 + f_2 + \cdots + f_m) \subset \mathrm{Im}\, f_1 + \mathrm{Im}\, f_2 + \cdots + \mathrm{Im}\, f_m.)$$

5. Soit un entier $m \geqslant 2$. On considère des projecteurs $p_1, p_2, \ldots, p_m$ de E.
Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
 (i) pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\}^2$ vérifiant $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$;

(ii) $p = \sum_{i=1}^{m} p_i$ est un projecteur de E.