# 2

# ALGÈBRE

---

**Exercice 2.1.**

Soit $E$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$, où $n$ est un entier naturel non nul.

Pour $\lambda$ réel non nul, on définit l'application $u_\lambda$ qui au polynôme $P$ de $E$ associe le polynôme :

$$u_\lambda(P)(X) = \frac{1}{2}P(X) + \Big(\lambda\int_0^1 P(t)\,dt\Big)X$$

1. Montrer que $u_\lambda$ est un endomorphisme de $E$.

2. Pour quelles valeurs de $\lambda$, $u_\lambda$ est-il un automorphisme de $E$ ? Déterminer alors l'automorphisme $u_\lambda^{-1}$.

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espace propres de $u_\lambda$. L'endomorphisme $u_\lambda$ est-il diagonalisable ?

---

**Solution :**

1. L'application $u_\lambda$ est linéaire, par linéarité de l'intégration. Comme $\Big(\lambda\int_0^1 P(t)\,dt\Big)X$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, il vient :

$$\deg\big(u_\lambda(P)\big) \leqslant \max(\deg(P), 1) \leqslant n,$$

ce qui montre que $u_\lambda$ est un endomorphisme de $E$.

2. Soit $P \in \mathrm{Ker}(u_\lambda)$.

$\rightarrow$ Si $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0$ ou si $\lambda = 0$, alors $u_\lambda(P) = \frac{1}{2}P = 0$ donne $P = 0$.

$\rightarrow$ Si $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt \neq 0$ et si $\lambda \neq 0$, alors $u_\lambda(P) = 0$ donne $P = -2\Big(\lambda\int_0^1 P(t)\,dt\Big)X$, donc $P(X)$ est de la forme $\alpha X$, avec $\alpha = -2\lambda\frac{\alpha}{2}$, et :

- Si $\lambda \neq -1$, $\alpha = 0$ et $P = 0$.
- Si $\lambda = -1$, $\alpha$ est quelconque et $\mathrm{Ker}(u_{-1}) = \mathrm{Vect}(X)$.

Ainsi $E$ étant de dimension finie :

$$u_\lambda \in GL(E) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(u_\lambda) = \{0\} \Longleftrightarrow \lambda \neq -1$$

Pour déterminer l'inverse de $u_\lambda$, utilisons la linéarité de $u_\lambda^{-1}$. Ainsi :

$$P(X) = \frac{1}{2}u_\lambda^{-1}(P) + \Big(\lambda\int_0^1 P(t)\,dt\Big)u_\lambda^{-1}(X)$$

Par ailleurs :

$$u_\lambda(X) = \frac{1}{2}X + X.\lambda\int_0^1 t\,dt = \frac{\lambda+1}{2}X$$

et donc, puisque $\lambda \neq -1$ : $u_\lambda^{-1}(X) = \dfrac{2}{\lambda+1}X$.

Finalement :

$$u_\lambda^{-1}(P) = 2P + \frac{2\lambda}{\lambda+1}X\int_0^1 P(t)\,dt$$

3. L'équation $u_\lambda(P) = \alpha P$ s'écrit

$$\big(\alpha - \frac{1}{2}\big)P(X) = \lambda X\int_0^1 P(t)\,dt$$

• Pour $\lambda = 0$, on a simplement $u_0(P) = \dfrac{1}{2}P$, et $u_0$ est l'homothétie de $E$ de rapport $\dfrac{1}{2}$. Tout polynôme est polynôme propre associé à l'unique valeur propre $\dfrac{1}{2}$.

• Supposons donc maintenant $\lambda \neq 0$.

• Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Comme $\lambda \neq 0$, l'équation se réduit à $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0$, donc $\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de $u_\lambda$ et le sous-espace propre associé est le noyau de l'application linéaire $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$.

Ce noyau est un hyperplan de $E$, donc est de dimension $n$.

• Si $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$. Le polynôme $P$ est donc de la forme $P(X) = aX$ et l'équation s'écrit :

$\big(\alpha - \frac{1}{2}\big)aX = \lambda X\,\frac{a}{2}$, soit : $a = 0$ sauf si $\alpha - \frac{1}{2} = \lambda$.

Ainsi, $\alpha = \dfrac{\lambda+1}{2}$ (et comme $\lambda \neq 0$ on a bien $\alpha \neq \frac{1}{2}$) est valeur propre associée au vecteur propre $X$. Le sous-espace propre associé est donc de dimension 1.

L'homothétie $u_0$ est diagonalisable. Dans le cas général, $u_\lambda$ l'est également puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à $n+1$, qui est la dimension de $E$.

---

**Exercice 2.2.**

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $E_1, E_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, supplémentaires dans $E$ et non réduits au vecteur nul.

Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$ et $u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$.

On note $u$ l'endomorphisme de $E$ tel que :

$$\begin{cases} \forall\, x \in E_1, u(x) = u_1(x) \\ \forall\, x \in E_2, u(x) = u_2(x) + u_3(x) \end{cases}$$

1. Donner la forme de la matrice de $u$ dans une base de $E$ obtenue en mettant « bout à bout » une base de $E_1$ et une base de $E_2$.

2. a) Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $x = x_1 + x_2$. Montrer que :

$$u(x) = \lambda x \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$$

b) En déduire que $\lambda$ est valeur propre de $u$ si et seulement si $\lambda$ est valeur propre de $u_1$ ou de $u_2$.

c) Soit $\lambda$ un réel qui est valeur propre de $u_1$ mais pas de $u_2$. Comparer les sous-espaces propres de $u$ et de $u_1$ associés à $\lambda$.

d) Soit $\lambda$ un réel qui est valeur propre de $u_2$ mais pas de $u_1$. Comparer les dimensions des sous-espaces propres de $u$ et de $u_2$ associés à $\lambda$.

3. On suppose dans cette question que $u_1$ et $u_2$ n'ont pas de valeur propre commune. Montrer que $u$ est diagonalisable si et seulement si $u_1$ et $u_2$ le sont.

4. Soit $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c) \in \mathbb{R}^7$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & a_1 & b_1 \\ 2 & -1 & 2 & a_2 & b_2 \\ 2 & 2 & -1 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les valeurs propres de $A$.

b) Montrer que si $c^2 \neq 9$, $A$ est diagonalisable.

---

**Solution :**

1. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $E_1$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $E_2$. Notons $A_1$ (resp. $A_2$) la matrice associée à $u_1$ dans la base $\mathcal{B}_1$ (resp. la matrice associée à $u_2$ dans la base $\mathcal{B}_2$). Enfin, soit $A_3$ la matrice associée à $u_3$ par rapport aux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$.
La matrice associée à $u$ par rapport aux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ est alors :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

2. a) On a $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = [u_1(x_1) + u_3(x_2)] + u_2(x_2) \in E_1 \times E_2$. De même $\lambda x = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in E_1 \times E_2$.
Comme $E = E_1 \oplus E_2$, l'unicité de la décomposition donne :

$$u(x) = \lambda x \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$$

b) Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$.
Par la question précédente, il existe $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ avec $(x_1, x_2) \neq (0_E, 0_E)$, tel que :

$$\begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$$

• Si $x_2 \neq 0$, alors $\lambda$ est valeur propre de $u_2$.

• Si $x_2 = 0$, alors $x_1 \neq 0$ et $\lambda$ est valeur propre de $u_1$.
Ainsi :

$$\mathrm{Spec}(u) \subseteq \mathrm{Spec}(u_1) \cup \mathrm{Spec}(u_2)$$

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_1) \cup \mathrm{Spec}(u_2)$.

• Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_1)$, alors tout vecteur propre $x_1$ de $u_1$ associé à $\lambda$ est vecteur propre de $u$ (avec $x_2 = 0$).

• Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_2) \setminus \mathrm{Spec}(u_1)$, alors $u_1 - \lambda I_{E_1}$ est inversible. Soit $x_2 \in E_2$ un vecteur propre de $u_2$ associé à $\lambda$. Dans ces conditions, le vecteur $x$ défini par :

$$x = x_2 - (u_1 - \lambda I_{E_1})^{-1}(u_3(x_2))$$

est non nul et vérifie $u(x) = \lambda x$. Donc $\lambda$ est valeur propre de $u$.

En conclusion :

$$\mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}(u_1) \cup \mathrm{Spec}(u_2)$$

c) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_1) \setminus \mathrm{Spec}(u_2)$. Soit $x = x_1 + x_2 \in E_1 \times E_2$. On sait que :

$$u(x) = \lambda x \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ u_2(x_2) = \lambda x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1(x_1) + u_3(x_2) = \lambda x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Ceci est équivalent à $x \in \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1})$. Finalement :

$$E_{(\lambda)}(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda I_E) = \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1}) = E_{1(\lambda)}(u_1)$$

d) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u_2) \setminus \mathrm{Spec}(u_1)$. L'endomorphisme $u_1 - \lambda I_{E_1}$ est bijectif et

$$\begin{cases} (u_1 - \lambda I_{E_1})(x_1) = -u_3(x_2) \\ x_2 \in \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2}) \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = -(u_1 - \lambda I_{E_1})^{-1}(u_3(x_2)) + x_2 \\ x_2 \in \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2}) \end{cases}$$

Soit $\theta : x_2 \mapsto x_2 - (u_1 - \lambda I_{E_1})^{-1}(u_3(x_2))$. L'application $\theta$ est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2})$ sur $\mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)$.
En effet, l'application réciproque est l'application qui, à un vecteur $x$ du sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)$, associe sa projection sur $E_2$ parallèlement à $E_1$ qui est effectivement un élément de $\mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2})$. Ainsi :

$$\dim \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2}) = \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)$$

3. Les spectres de $u_1$ et $u_2$ étant disjoints, on peut écrire, par la question précédente :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_1)} \dim \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1}) + \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_2)} \dim \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda I_E)$$

Or $u$ est diagonalisable si et seulement si :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim \mathrm{Ker}(u - \lambda I) = \dim E = \dim E_1 + \dim E_2,$$

ce qui est équivalent à :

$$\Big(\dim E_1 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_1)} \dim \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1})\Big) + \Big(\dim E_2 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u_2)} \dim \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2})\Big) = 0$$

Or ces deux entiers étant positifs, ceci est encore équivalent à :

$$\begin{aligned}0 &= \dim E_1 - \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u_1)} \dim \mathrm{Ker}(u_1 - \lambda I_{E_1})\\ &= \dim E_2 - \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u_2)} \dim \mathrm{Ker}(u_2 - \lambda I_{E_2})\end{aligned}$$

Donc $u$ est diagonalisable si et seulement si $u_1$ et $u_2$ sont diagonalisables.

4. Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ ayant $A$ comme matrice associée dans la base canonique $(e_1, \dots, e_5)$. Posons $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(e_4, e_5)$. Alors $u$ est du type étudié dans les questions précédentes, avec $u_1$ endomorphisme de $E_1$ de matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ dans la base } (e_1, e_2, e_3)$$

et $u_2$ endomorphisme de $E_2$ de matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ dans la base } (e_4, e_5)$$

L'application $u_3 \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ a pour matrice $A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ dans les bases $(e_4, e_5)$ et $(e_1, e_2, e_3)$.

On remarque que les matrices $A_1$ et $A_2$ sont symétriques réelles, donc diagonalisables.

a) On a $A_1 + 3I_3 = J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Cette dernière matrice est de rang 1. Ses valeurs propres sont 0 (le sous-espace propre associé est $\mathrm{Ker}(J)$ qui est de dimension 2) et 6 (le sous-espace propre associé est de dimension 1 engendré par le vecteur $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$).

$\star$ Ainsi le spectre de $A_1$ est $\{-3, 3\}$ de sous-espaces propres $E_{-3} = \mathrm{Ker}\, J$ et $E_3 = \mathrm{Vect}(x_0)$.

$\star$ Un calcul immédiat donne : $A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

D'après la question 2. b) : $\mathrm{Spec}(A) = \{3, -3, c, -c\}$.

b) Si $|c| \neq 3$, les matrices $A_1$ et $A_2$ sont diagonalisables et sans valeur propre commune. Ainsi $A$ est diagonalisable.

---

**Exercice 2.3.**

A. Soient deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\alpha < \beta$ . On définit une application $F$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$F(x,y) = \frac{\alpha x^2 + \beta y^2}{x^2 + y^2}$$

1. Justifier les inégalités : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \alpha \leqslant F(x,y) \leqslant \beta$.

2. En déduire que $F$ est bornée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et déterminer les points où elle atteint ses bornes.

3. Peut-on prolonger $F$ par continuité à $\mathbb{R}^2$ tout entier ?

B. Le but de cette question est d'effectuer un travail analogue sur :
$$F(x,y) = \frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + 2xy + 2y^2}.$$

1. Démontrer que $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :
$$\varphi : ((x,y),(x',y')) \mapsto xx' + xy' + x'y + 2yy'.$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

*Notations* : les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{u} = (x,y)$ et $\overrightarrow{u}' = (x',y')$ étant donnés, on écrira : $\varphi((x,y),(x',y')) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}' \rangle$.

2. Construire une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, orthonormée pour le produit scalaire $\varphi$, contenant le vecteur $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$.
On demande, de plus, de choisir $e_2 = (\gamma, \delta)$, avec $\delta > 0$.

Écrire les formules de changement de bases liant les coordonnées $(x,y)$ et $(X,Y)$ de $\overrightarrow{u} = (x,y) = X\overrightarrow{e_1} + Y\overrightarrow{e_2}$.

3. Rechercher les valeurs propres de l'endomorphisme $s$ de $\mathbb{R}^2$ qui a pour matrice dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculer en fonction des coordonnées $(X,Y)$ et $(x,y)$ de $\overrightarrow{u}$ le nombre réel $q(\overrightarrow{u}) = \langle \overrightarrow{u}, s(\overrightarrow{u}) \rangle$.

4. Soit $\overrightarrow{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Utiliser une base de vecteurs propres de $s$ pour évaluer $F(\overrightarrow{u}) = \dfrac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + 2xy + 2y^2}$.

En déduire que $F$ est bornée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et atteint ses bornes.

---

**Solution :**

A. 1. Comme $\alpha < \beta$, il vient
$$\alpha x^2 + \alpha y^2 \leqslant \alpha x^2 + \beta y^2 \leqslant \beta x^2 + \beta y^2$$
Il reste à diviser par $x^2 + y^2 > 0$ pour obtenir le résultat demandé.

2. La question précédente montre que $F$ est bornée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ et on remarque que $F(x,0) = \alpha, F(0,y) = \beta$.
De manière générale, si $F(x,y) = \alpha$, alors $\beta y^2 = \alpha y^2$, ce qui entraîne que $y = 0$. Raisonnement identique pour $\beta$.

3. Supposons que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \ell$. Alors :
$$\lim_{x\to 0} F(x,0) = \alpha = \ell = \lim_{y\to 0} F(0,y) = \beta$$
Ce qui est absurde, puisque $\alpha < \beta$.
Ainsi, on ne peut prolonger $F$ par continuité en $(0,0)$.

B. 1. On vérifie que $\varphi$ est une forme bilinéaire, symétrique. La forme quadratique associée est :
$$d(u) = \varphi(x,x) = x^2 + 2y^2 + 2xy = (x+y)^2 + y^2 \geqslant 0$$

De plus, $d(u) = 0 \Longleftrightarrow x = y, y = 0$, soit $u = 0$.

Ainsi, $\varphi$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Comme $||e_1|| = 1$, il suffit de trouver $e_2$ unitaire et orthogonal à $e_1$. Le vecteur $e_2 = (-1, 1)$ convient.
Les formules de changement de base sont :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{cases} x = X - Y \\ y = Y \end{cases}$$

En particulier si $u = (x, y)$, alors $||u||^2 = x^2 + 2y^2 + 2xy = X^2 + Y^2$.

3. La matrice $S$ est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.
Ses valeurs propres sont les racines de l'équation $(1 - \lambda)(-\lambda) - 4 = 0$, soit $\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$, et $\lambda_1 = \alpha = \frac{1}{2}\big(1 - \sqrt{17}\big)$, $\lambda_2 = \beta = \frac{1}{2}\big(1 + \sqrt{17}\big)$.
Enfin

$$\begin{aligned} q(u) &= \langle u, s(u)\rangle = \langle Xe_1 + Ye_2, (X - 2Y)e_1 - 2Xe_2\rangle = X^2 - 4XY \\ &= x^2 - 2xy - 3y^2 \end{aligned}$$

4. Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base orthonormée de vecteurs propres de $s$ associés aux deux valeurs propres $\alpha$ et $\beta$. Dans cette base :

$$q(u) = \alpha x'^2 + \beta y'^2, \quad \text{ et } ||u||^2 = x'^2 + y'^2$$

Ainsi

$$F(x, y) = \frac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 + 2xy + 2y^2} = \frac{\alpha x'^2 + \beta y'^2}{x'^2 + y'^2}$$

D'après la partie A, la fonction $F$ est bornée par $\alpha = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17})$ et $\beta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17})$, ces bornes étant atteintes en $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$.

---

**Exercice 2.4.**

Pour $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\theta_f(x) = x^2 f''(x) - 6xf'(x) + 12f(x)$ et on note $\theta$ l'application définie sur $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par :

$$\theta : f \longmapsto \theta_f$$

1. a) Montrer que $\theta$ est une application linéaire.

b) En déduire que $E = \{f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \theta_f = 0\}$ est un espace vectoriel réel.

2. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales réelles et on pose $F = E \cap \mathcal{P}$.

Soit $f \in F$ avec $f \neq 0$. Montrer que son degré est 3 ou 4. En déduire que l'ensemble $F$ est un espace vectoriel réel de dimension 2 et en donner une base.

3. Trouver toutes les fonctions $\phi$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ de classe $C^2$ telles que $\phi''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
Montrer qu'elles forment un espace vectoriel réel de dimension 4 et en donner une base.

4. Soit $f \in E$. Montrer que $f(0) = 0$. En déduire qu'il existe $\varphi$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ de classe $\mathbb{C}^2$ telle que $f(x) = x^3\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
Montrer qu'alors $\varphi''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Etudier la réciproque.

5. Montrer que $E$ est de dimension 4 et en donner une base.

---

**Solution :**

1. a) La linéarité de l'application $\theta$ provient de la linéarité de la dérivation.

b) Il est évident que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, puisque $E = \operatorname{Ker}\theta$.

2. Soit $f \in F$. Supposons que $f$ soit de degré $n$, de coefficient dominant $a_n$. Le coefficient dominant de $\theta_f$ est alors $[n(n-1) - 6n + 12]a_n = (n-3)(n-4)a_n$.
Comme $a_n \neq 0$, cela entraîne que $n = 3$ ou $n = 4$.
On vérifie que $X^3$ et $X^4$ sont des éléments de $F$.
Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{4} a_k X^k \in \mathbb{R}_4[X]$ un élément de $F$. Soit $Q = P - a_4X^4 - a_3X^3$. Le polynôme $Q$ est un élément de $F$ de degré inférieur ou égal à 2. Donc $Q = 0$ et $P = a_4X^4 + a_3X^3$.
On en déduit que $F$ est un espace vectoriel de dimension 2 puisqu'il est engendré par $X^3$ et $X^4$.

3. Si $\varphi''(x) = 0$ sur un intervalle $I$, alors $\varphi(x) = ax + b$ sur $I$. Ici il est nécessaire de séparer $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et :

$$\varphi(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x > 0 \\ cx + d & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On obtient donc un espace vectoriel de dimension 4 avec pour base $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ définie par :

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \varphi_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \varphi_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4. $\star$ Par continuité : $\lim\limits_{x\to 0} \theta_f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 12f(x) = 12f(0) = 0$.

$\star$ Soit $f \in E$. Posons $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^3}$. Ainsi $f(x) = x^3g(x)$ et $\theta_f = 0$ est équivalent à $g''(x) = 0$, ce qui entraîne que $g$ est combinaison linéaire de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.
Réciproquement, toute combinaison linéaire de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ est élément de $E$.

5. Comme les fonctions $x \mapsto x^3g(x)$ se prolongent en fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $E$ est un espace vectoriel de dimension 4 engendré par $(x \mapsto x^3\varphi_1(x), x \mapsto x^3\varphi_2(x), x \mapsto x^3\varphi_3(x), x \mapsto x^3\varphi_4(x))$.

---

**Exercice 2.5.**

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions de l'équation matricielle

$$A^2 = I_3 \qquad (1)$$

où $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $I_3$ est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose également que $A \notin \{I_3, -I_3\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant (1). Montrer que $\operatorname{Im}(A - I_3) \subset \operatorname{Ker}(A + I_3)$. En déduire que l'une des matrices $A - I_3$ ou $A + I_3$ est de rang inférieur ou égal à 1.

2. Soit $B$ une matrice quelconque de rang inférieur ou égal à 1. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ tels que le terme général de $B$ s'écrive $b_{i,j} = \lambda_i \mu_j$. En déduire que $B^2 = \operatorname{tr}(B)B$, où tr représente la trace de la matrice $B$, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

3. On suppose que la matrice $B = A - I_3$ de la première question est de rang 1. Montrer que $\operatorname{tr}(B) = -2$.

4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation matricielle (1).

---

**Solution :**

1. La matrice $A$ vérifie $A^2 - I = (A + I)(A - I) = (A - I)(A + I) = 0$.
Ainsi, pour tout $x$ de $\mathbb{R}^3$, $(A + I)(A - I)(x) = 0$, ce qui signifie que

$$\operatorname{Im}(A - I) \subset \operatorname{Ker}(A + I).$$

On remarquera qu'on a de même $\operatorname{Im}(A + I) \subset \operatorname{Ker}(A - I)$.

On a donc $\operatorname{rg}(A-I) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(A+I)$. Comme $\operatorname{rg}(A-I)+\dim \operatorname{Ker}(A+I) = 3$ et $A \neq I$, cela entraîne que $\operatorname{rg}(A - I) = 1$ et $\dim \operatorname{Ker}(A + I) = 2$.
L'inclusion $\operatorname{Im}(A + I) \subset \operatorname{Ker}(A - I)$, avec $A \neq -I$, donne de la même façon $\operatorname{rg}(A + I) = 1$ et $\dim \operatorname{Ker}(A - I) = 2$.
On remarquera que si $\operatorname{rg}(A - I) = 0$, alors $A = I$ et si $\operatorname{rg}(A + I) = 0$, alors $A = -I$.

2. $\star$ Si $\operatorname{rg}(B) = 0$, alors $B = 0$ et on choisit les $\lambda_i$ ou les $\mu_j$ tous nuls.
$\star$ Supposons que $\operatorname{rg}(B) = 1$. Cela signifie que les vecteurs colonnes $(C_1, C_2, C_3)$ de $B$ sont engendrés par un vecteur non nul $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$. On peut donc écrire :

$$C_1 = \mu_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, C_2 = \mu_2 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, C_3 = \mu_3 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que $b_{i,j} = \lambda_i \mu_j$.
Notons $L = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$B = \Lambda L, \text{ d'où } B^2 = \Lambda(L\Lambda)L = (L\Lambda)B$$

(car $L\Lambda$ est une matrice carrée d'ordre 1 que l'on identifie à son unique terme. On vérifie d'ailleurs immédiatement que $L\Lambda = \operatorname{tr}(B)$).

3. On a $B^2 = (A - I)^2 = A^2 - 2A + I = -2(A - I) = -2B$.
La question précédente montre que $\operatorname{tr}(B) = -2$.

4. Si $B = A + I$ est de rang 1, alors

$$B^2 = (A + I)^2 = A^2 + 2A + I = 2(A + I) = 2B$$

Ainsi :

• Si $\text{rg}(A - I) = 1$, alors $A = I + B$ avec $\text{rg}(B) = 1$, soit $A = I + \Lambda L$, avec $L\Lambda = -2$.

• Si $\text{rg}(A + I) = 1$, alors $A = -I + B$ avec $\text{rg}(B) = 1$, soit $A = -I + \Lambda L$, avec $L\Lambda = 2$.

Réciproquement, on vérifie que ces matrices conviennent.

---

**Exercice 2.6.**

On désigne par $E$ un espace vectoriel complexe de dimension finie. Soit $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $f^2 = f \circ f = g$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_\lambda = \text{Ker}(g - \lambda Id_E)$ et $F_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda Id_E)$.

1. Montrer que si $f$ est diagonalisable, $g$ l'est aussi.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, une valeur propre de $g$ et $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \lambda$.

On pose pour $x \in E_\lambda$, $y = x - f\big(\frac{x}{\delta}\big)$ et $z = x + f\big(\frac{x}{\delta}\big)$.

Calculer $f(y)$ et $f(z)$. En déduire que $E_\lambda = F_\delta \bigoplus F_{-\delta}$.

3. En déduire que si $g$ est injective diagonalisable, alors $f$ l'est aussi.

4. On suppose $g$ est diagonalisable et n'est pas injective.

   a) Montrer que $\text{Ker}\, f \subset \text{Ker}\, g$.

   b) Montrer que $f$ est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}\, f = \text{Ker}\, g$.

5. On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

Montrer que $f$ n'est pas diagonalisable mais que $g = f^2$ est diagonalisable.

---

**Solution :**

1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de $f$. Pour tout $i$ il existe $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Donc $g(e_i) = \lambda_i^2 e_i$.

Ainsi $(e_1, \dots, e_n)$ est aussi une base de vecteurs propres de $g$ et $g$ est diagonalisable.

2. On a :

$$f(y) = f(x) - f^2\big(\frac{x}{\delta}\big) = f(x) - \lambda \frac{x}{\delta} = f(x) - \delta x = -\delta(x - f(\frac{x}{\delta})) = -\delta y$$

De même $f(z) = f(x) + \delta x = \delta z$.

$\star$ Soit $u \in \text{Ker}(f - \delta I) \cap \text{Ker}(f + \delta I)$. Alors $f(u) = \delta u = -\delta u$, donc $u = 0$. Ceci montre que $F_{-\delta}$ et $F_\delta$ sont en somme directe.

$\star$ On a montré que $y \in F_{-\delta}$ et $z \in F_\delta$.

Comme $x = \dfrac{y + z}{2}$, ceci montre que $E_\lambda \subset F_{-\delta} \oplus F_\delta$

$\star$ Réciproquement, si $x \in F_{-\delta}$, on a $f(x) = -\delta x$, donc

$g(x) = f\big(f(x)\big) = f(-\delta x) = -\delta f(x) = \delta^2 x = \lambda x$ et $x \in E_\lambda$, soit $F_{-\delta} \subset E_\lambda$.

On montre de même que $F_\delta \subset E_\lambda$ et donc $F_{-\delta} \oplus F_\delta \subset E_\lambda$.

Finalement :

$$F_{-\delta} \oplus F_\delta = E_\lambda$$

3. Supposons $g$ injective et diagonalisable. L'espace $E$ est la somme directe des sous-espaces propres de $g$, et comme 0 n'est pas valeur propre de $g$, chaque sous-espace propre de $g$ est lui-même somme directe de sous-espaces propres de $f$ (au moins un). Donc $E$ est somme directe des sous-espaces propres de $f$, ce qui prouve que $f$ est diagonalisable.

4. a) Soit $x$ tel que $f(x) = 0$ ; alors $g(x) = f^2(x) = 0$. Donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$.

b) Supposons $g$ diagonalisable. L'espace $E$ est la somme directe des sous-espaces propres de $g$ associés aux valeurs propres non nulles et de $\operatorname{Ker} g$. Les sous-espaces propres de $g$ associés aux valeurs propres non nulles se décomposent en somme directe de sous-espaces propres de $f$ (question 3). Donc $f$ est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

5. On voit que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $M^2$ est diagonalisable car de rang 1 (son noyau est donc de dimension 2) et 1 est valeur propre de $M^2$.

Par contre $M$ est de rang 2 (son noyau est donc de dimension 1). Par la question précédente, $M$ n'est pas diagonalisable.

---

**Exercice 2.7.**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs colonnes propres des matrices $A$ et $B$.

b) En déduire les valeurs propres de la matrice

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & -b & a \\ -b & b & -a \\ a & -a & 2b-a \end{pmatrix}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux paramètres réels}$$

2. Soit $n$ un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel constitué des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à $n$.
Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ; on définit l'application $\theta$ de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$ par :

$$\theta(P) = \big(P(a_0), \dots, P(a_n)\big)$$

a) Montrer que si $\theta$ est bijective, alors les nombres $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.

b) Réciproquement, montrer que si les $a_k$ sont deux à deux distincts, alors $\theta$ est bijective.

3. a) Existe-t-il un polynôme $P$ à coefficients réels tel que $P(A) = B$ ? Si oui, déterminer un tel polynôme.

b) Répondre à la même question en échangeant les rôles de $A$ et $B$.

---

**Solution :**

1. a) La matrice $A$ possède trois valeurs propres distinctes : $-2, 1, 0$. Les sous-espaces propres associés sont :

$$E_{-2}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\ E_1(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ E_0(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

La matrice $A$ est diagonalisable.

La matrice $B$ possède deux valeurs propres : $2, 0$. On a :

$$E_0(B) = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad E_2(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

On constate que la matrice $B$ est diagonalisable dans la même base que la matrice $A$.

b) On s'aperçoit que $M(a, b) = aA + bB$. Les deux matrices $A$ et $B$ sont simultanément diagonalisables avec la même matrice de passage

$$Q = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$Q^{-1}AQ = D_A = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ Q^{-1}BQ = D_B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

et

$$Q^{-1}M(a, b)Q = \begin{pmatrix}-2a+2b & 0 & 0\\ 0 & a+2b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $M(a, b)$ sont donc $-2a + 2b, a + 2b, 0$ (ces nombres n'étant pas nécessairement deux à deux distincts...)

2. On remarque que l'application $\theta$ est manifestement linéaire.

a) Supposons les nombres $a_0, \ldots, a_n$ non deux à deux distincts et soit alors $i, j$ tels que $a_i = a_j$ et $i \neq j$. Soit $P$ le polynôme

$$P(X) = \prod_{k=1, k\neq i}^{n} (X - a_k)$$

Ce polynôme est de degré inférieur ou égal à $n$, n'est pas le polynôme nul et $\theta(P) = (0, 0, \ldots, 0)$ ; ceci montre que $\theta$ n'est pas injective, donc n'est pas bijective.

b) Si les réels $(a_k)$ sont deux à deux distincts, et si $P \in \operatorname{Ker}\theta$, alors $P = 0$, puisque ce polynôme admet $n + 1$ racines distinctes, alors qu'il est de degré inférieur ou égal à $n$.

3. a) Soit $P$ un polynôme tel que $B = P(A)$. Alors $D_B = P(D_A)$. Ceci équivaut à :

$$\begin{cases} P(-2) = 2\\ P(1) = 2\\ P(0) = 0\end{cases}$$

D'après la question précédente, un tel polynôme existe. Par exemple le polynôme $P(X) = X + X^2$ convient.

b) Par contre $A = P(B)$ équivaut à : $\begin{cases} P(2) = -2 \\ P(2) = 1 \\ P(0) = 0 \end{cases}$

Les deux premières équations sont incompatibles : il n'existe pas de polynôme $P$ tel que $A = P(B)$.

---

**Exercice 2.8.**

On appelle trace d'une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le réel $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de $A$.

1. Démontrer que l'application trace est linéaire .

2. Écrire les matrices de la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle les coordonnées de la matrice $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ sont $(a_1, a_2, a_3, a_4)$. $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question on suppose que $n = 2$. Soient $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer le réel $\mathrm{tr}({}^tBA)$.

(N.B. ${}^tBA$ est le produit de la matrice transposée de $B$ par la matrice $A$).

a) Vérifier que l'application $\varphi$ définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\varphi : (A, B) \longmapsto \mathrm{tr}({}^tBA)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) La base $\mathcal{B}$ est-elle base orthonormée pour ce produit scalaire ?

c) Quel est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, espace vectoriel des matrices diagonales ?

d) Calculer les réels $a$ et $b$ qui rendent minimale la norme euclidienne associée au produit scalaire $\varphi$ de $\begin{bmatrix} a & b-1 \\ b & a-1 \end{bmatrix}$. Que pouvez-vous dire des matrices $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dans l'espace vectoriel euclidien $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \varphi)$ ?

4. On suppose dans cette question que $n \geqslant 2$ et on admet que l'application $\varphi$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :$\varphi : (A, B) \longmapsto \mathrm{tr}({}^tBA)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que la base canonique est orthonormée pour ce produit scalaire.

Soit $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

a) Calculer les puissances successives de $U$, c'est-à-dire les matrices $U^k$ pour $k$ variant de 1 à 5.

b) Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ engendré par les puissances successives de $U$. Déterminer la projection orthogonale de $A$ sur $F$.

---

**Solution :**

1. Si $A, B$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda$ réel :

$$\mathrm{tr}(\lambda A + B) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{k,k} + b_{k,k}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} + \sum_{k=1}^{n} b_{k,k} = \lambda\,\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

2. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ :

la base demandée est bien évidemment la base canonique $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. a) On vérifie que $\mathrm{tr}(A^T B) = \sum\limits_{k=1}^{4} a_k b_k$.

L'application $\varphi$ est bilinéaire, par linéarité de la transposition et de la trace. Elle est symétrique (voir ci-dessus). De plus :

$$\mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{k=1}^{4} a_k^2 \geqslant 0, \text{ et } \mathrm{tr}(A^T A) = 0 \implies A = 0$$

b) La base $(E_{i,j})$ est orthonormée car :

$$\mathrm{tr}(E_{i,j}^T E_{i,j}) = 1 \text{ et } \mathrm{tr}(E_{i,j}^T E_{k,\ell}) = \delta_{i,k}\,\mathrm{tr}(E_{j,\ell}) = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,\ell).$$

c) L'espace $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par la question précédente, l'orthogonal de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est engendré par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) On cherche le *minimum* de la fonction $f$ définie par :

$$\begin{aligned} f(a,b) &= a^2 + (b-1)^2 + b^2 + (a-1)^2 = 2a^2 - 2a + 2b^2 - 2b + 2 \\ &= 2\big(a - \tfrac{1}{2}\big)^2 + 2\big(b - \tfrac{1}{2}\big)^2 + 1 \end{aligned}$$

Le *minimum* vaut 1 et est atteint pour $a = b = \dfrac{1}{2}$.

La matrice $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la projection orthogonale de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur le sous-espace $F$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

4. a) La matrice $U$ est la matrice associée dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_5)$ à l'endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$u(e_i) = e_{i+1}, (1 \leqslant i \leqslant 4),\ u(e_5) = e_1$$

L'endomorphisme $u$ transforme donc $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ en $(e_2, e_3, e_4, e_5, e_1)$.
Par conséquent $u^2$ transforme $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ en $(e_3, e_4, e_5, e_1, e_2)$,
$u^3$ transforme $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ en $(e_4, e_5, e_1, e_2, e_3)$,
$u^4$ transforme $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ en $(e_5, e_1, e_2, e_3, e_4)$ et $u^5$ est l'application identité.

b) On remarque que si $h \neq k$, $\langle U^h, U^k \rangle = 0$ et que $\langle U^k, U^k \rangle = 5$.
La famille $(U^k)_{1\leqslant k\leqslant 5}$ est donc une famille orthogonale. Elle est libre et c'est une base de $F$.

La projection orthogonale de $A$ sur $F$ est la matrice $A' = \sum_{k=1}^{5} \lambda_k U^k$ de $F$ telle que pour tout $h$, $\langle A - A', U^h \rangle = 0$.

Or, pour tout $h$, $\langle A, U^h \rangle = 1$ et $\langle A', U^h \rangle = \langle \sum_{k=1}^{5} \lambda_k U^k, U^h \rangle = 5\lambda_h$

Donc : $A' = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

---

**Exercice 2.9.**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $a$ et $b$ deux réels distincts et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$(f - aId) \circ (f - bId) = 0 \quad \text{et } f \text{ n'est pas une homothétie.}$$

($Id$ représente l'endomorphisme identité de $E$)

1. Montrer qu'il existe deux réels non nuls $\lambda$ et $\mu$ tels que $\lambda(f - aId)$ et $\mu(f - bId)$ soient des projecteurs, qu'on notera $g$ et $h$ respectivement.

2. Que vaut $g + h$ ? En déduire que $\mathrm{Im}(f - bId) = \mathrm{Ker}(f - aId)$.

3. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^n$ en fonction de $g$ et $h$.

5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $a$ et $b$ pour que $f$ soit inversible.

Calculer alors, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f^p$ en fonction de $g$ et $h$.

---

**Solution :**

1. Posons $g = \lambda(f - aI)$. Alors :

$$\begin{aligned} g^2 &= \lambda^2(f^2 - 2af + a^2 I) = \lambda^2\big((a+b)f - abI - 2af + a^2 I\big) \\ &= \lambda^2(b-a)(f - aI) \end{aligned}$$

Ainsi $g^2 = g$ si et seulement si $\lambda = \dfrac{1}{b-a}$.

De même $h^2 = h$ si et seulement si $\mu = \dfrac{1}{a-b}$.

2. On vérifie immédiatement que $g + h = I$.

- Comme $(f - aI) \circ (f - bI) = 0$, on a $\mathrm{Im}(f - bI) \subset \mathrm{Ker}(f - aI)$.
- Comme $\lambda(f - aI) + \mu(f - bI) = I$, pour tout $x$ de $E$ :

$$\lambda(f - aI)(x) + \mu(f - bI)(x) = x,$$

c'est-à-dire : $E = \mathrm{Im}(f - aI) + \mathrm{Im}(f - bI)$.

Donc

$n = \dim E = \dim \mathrm{Im}(f - aI) + \dim \mathrm{Im}(f - bI) - \dim[\mathrm{Im}(f - aI) \cap (\mathrm{Im}(f - bI)$

D'où :

$\dim \mathrm{Im}(f - bI) \geqslant n - \dim \mathrm{Im}(f - aI) = \dim \mathrm{Ker}(f - aI)$.

Ce résultat, joint à l'inclusion précédente donne :

$$\mathrm{Im}(f - bI) = \mathrm{Ker}(f - aI)$$

3. Comme $h$ est un projecteur, on sait que $E = \mathrm{Im}\, h \oplus \mathrm{Ker}\, h$. Donc, par la question précédente :

$$E = \mathrm{Ker}(f - bI) \oplus \mathrm{Ker}(f - aI)$$

ce qui signifie que $f$ est diagonalisable.

4. On sait que $f^0 = I = g + h$ et que $f = bg + ah$.
Comme $h \circ g = g \circ h = 0$, il vient : $f^2 = b^2 g + a^2 h$, et par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$f^n = b^n g + a^n h$$

5. Par la question 3, on sait que les valeurs propres de $f$ sont éléments de $\{a, b\}$ et que $f$ est diagonalisable. Comme $f$ n'est pas une homothétie, on en déduit que $a$ et $b$ sont effectivement les valeurs propres de $f$ et $f$ est inversible si et seulement $ab \neq 0$.

Comme $h \circ g = g \circ h = 0$ et que pour tout $n \geqslant 0$, $f^n = b^n g + a^n h$, alors :

$$(b^{-n} g + a^{-n} h) \circ (b^n g + a^n h) = I$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ :

$$f^n = b^n g + a^n h$$

---

**Exercice 2.10.**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, avec $n \geqslant 2$.

On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $E$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $f$ un élément non nul de $E^*$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\, f$ ?

2. Soit $H$ un sous-espace de $E$ de dimension $n - 1$ (on dit que $H$ est un hyperplan de $E$). Montrer qu'il existe $f \in E^*$ telle que $H = \mathrm{Ker}\, f$.

3. Soient $f$ et $g$ deux éléments non nuls de $E^*$ tels que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$. Montrer qu'il existe un réel non nul $a$ tel que $f = ag$.

4. Soit $H$ un hyperplan de $E$. Montrer que l'ensemble $D(H)$ des éléments de $E^*$ dont le noyau contient $H$ est un sous-espace vectoriel de $E^*$ dont on précisera la dimension.

On appelle *transvection* de $E$ tout endomorphisme de $E$ possédant les deux propriétés suivantes :

i) $\mathrm{Ker}(f - Id)$ est un hyperplan de $E$ (appelé « base » de $f$) ;

ii) $\mathrm{Im}(f - Id) \subset \mathrm{Ker}(f - Id)$.

5. Soit $f$ une transvection de $E$, montrer que $\mathrm{Im}(f - Id)$ est une droite (appelée « direction » de $f$).

6. Soit $f$ un élément non nul de $E^*$ et $u$ un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\, f$.

Pour tout vecteur $x$ de $E$, on pose $G_{f,u}(x) = x + f(x)u$.

Montrer que $G_{f,u}$ est une transvection dont on précisera la « base » et la « direction ».

---

**Solution :**

1. Si $f$ n'est pas identiquement nulle, le théorème du rang implique :

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rg}(f) = n - 1.$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan de $E$.

2. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $H$. On complète cette base en une base de $E$ avec un vecteur $e_n$. Définissons $f \in E^*$ par :

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}$$

On a immédiatement le résultat demandé.

3. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Complétons cette base avec un vecteur $e_n$. On sait alors que $f(e_n) \neq 0$ et $g(e_n) \neq 0$.

Soit $h \in E^*$ défini par :

$$h = f - \frac{f(e_n)}{g(e_n)}\, g$$

On a immédiatement, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $h(e_i) = 0$. Donc $h$ est identiquement nul et il existe $a = \dfrac{f(e_n)}{g(e_n)}$ tel que $f = ag$.

4. Par définition $D(H) = \{f \in E^* / H \subset \operatorname{Ker} f\}$.

$\star$ Soit $(f, g) \in D(H)^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in H$ :

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = 0$$

donc $H \subset \operatorname{Ker}(\lambda f + \mu g)$ et $\lambda f + \mu g \in D(H)$.

$\star$ Comme $0 \in D(H)$, $H$ est un sous-espace vcetoriel de $E^*$.

$\star$ Par la question 3, pour tout $(f, g) \in D(H)^2$ non nuls, on a $\operatorname{Ker} f = H = \operatorname{Ker} g$ et cela entraîne que $f$ et $g$ sont liés. Donc $D(H)$ est de dimension 1.

5. Par le théorème du rang, on sait que $\dim \operatorname{Im}(f - Id) = 1$, puisque son noyau est de dimension $n - 1$.

6. On vérifie d'abord (immédiatement) que $G_{f,u}$ est un endomorphisme de $E$.

Or :

- $\star$ $(G_{f,u} - Id)x = f(x).u = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$, donc $\operatorname{Ker}(G_{f,u} - Id) = \operatorname{Ker} f$.
- $\star$ $\operatorname{Im}(G_{f,u} - Id) = \operatorname{Vect}(u)$.

Enfin, puisque $u \in \operatorname{Ker} f$, on a $\operatorname{Im}(G_{f,u} - Id) \subset \operatorname{Ker}(G_{f,u} - Id)$. Tout ceci implique que $G_{f,u}$ est une transvection de base $\operatorname{Ker} f$ et de direction $\operatorname{Vect}(u)$.

---

**Exercice 2.11.**

Soit $p$ un entier tel que $p \geqslant 2$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et du produit scalaire canonique noté $\langle . \mid . \rangle$. On désigne par $\|.\|$ la norme associée. L'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $p$. On dit qu'une matrice $A$ est positive si elle est symétrique et si $\langle A\,(x) \mid x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$. On l'écrit sous la forme $A \succeq 0$.

1. a) Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

b) Soit $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Prouver que les matrices $({}^tT)T$ et $T({}^tT)$ sont positives.

2. Soit $A$ une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ fixée. On rappelle qu'il existe une matrice diagonale $D$ et une matrice orthogonale $P$ telles que $D = ({}^tP)AP$.

a) Montrer que si $X$ est une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, alors la matrice $Y = ({}^tP)XP$ est positive.

b) Prouver qu'une matrice positive $X$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est solution de l'équation $X^2 = A$ si et seulement si la matrice positive $Y = ({}^tP)XP$ est solution de l'équation $Y^2 = D$.

c) Soient $\alpha$ un réel strictement positif et $Y$ une matrice positive ; montrer que la matrice $Y+\alpha I_p$ est inversible ($I_p$ est la matrice de l'identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$). Résoudre l'équation $Y^2 = D$ avec $Y \succeq 0$.

d) En déduire qu'il existe une unique matrice positive $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ qui est solution de l'équation $X^2 = A$. On définit ainsi la racine carrée de la matrice positive $A$ et on la note $\sqrt{A}$.

3. Soit $A$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice $A$ est positive.

b) Déterminer sa racine carrée.

---

**Solution :**

1. a) Soit $A$ une matrice symétrique réelle positive. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $x$ un vecteur propre associé. On a alors :

$$0 \leqslant \langle Ax, x\rangle = \lambda ||x||^2$$

Donc $\lambda \geqslant 0$.

Réciproquement, $A$ étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (non nécessairement deux à deux distinctes).

Soit $x \in E$. Il existe $(x_1, \ldots, x_n)$ réels tels que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors :

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant 0$$

b) On peut écrire matriciellement :

$$\langle ({}^tT)Tx, x\rangle = {}^tX({}^tT)TX = ||TX||^2 \geqslant 0$$

et

$$\langle T({}^tT)x, x\rangle = {}^tXT{}^tTX = ||{}^tTX||^2 \geqslant 0$$

2. a) On peut écrire, pour tout vecteur colonne $U$ :

$${}^tUYU = {}^tU({}^tP)XPU = {}^t(PU)X(PU) = {}^tVXV \geqslant 0$$

b) Soit $X$ une matrice positive telle que $X^2 = A = PD({}^tP)$.
Alors
$$({}^tP)X^2P = [({}^tP)XP]^2 = D \Longleftrightarrow Y^2 = D$$
La réciproque est identique.

c) $\star$ La matrice $Y+\alpha I_p$ est symétrique réelle. Comme pour tout vecteur $U$, $(Y+\alpha I_p)(U) = YU+\alpha U$, $\lambda$ est une valeur propre de $Y+\alpha I_p$ si et seulement si $\lambda - \alpha$ est une valeur propre de $Y$. Comme $\alpha > 0$, les valeurs propres de $Y + \alpha I_p$ sont strictement positives et cette matrice est inversible.

$\star$ On a : $D(e_i) = \lambda_i e_i$, avec $\lambda_i \geqslant 0$.

- Si $\lambda_i = 0$, alors $||Ye_i||^2 = \langle Y^2 e_i, e_i\rangle = \langle De_i, e_i\rangle = 0$, et $Ye_i = 0$.
- Si $\lambda_i > 0$, on a :
$$0 = (Y^2 - \lambda_i I_p)e_i = (Y + \sqrt{\lambda_i} I_p)(Y - \sqrt{\lambda_i} I_p)e_i$$

Or la matrice $(Y + \sqrt{\lambda_i} I_p)$ est inversible (première partie de la question). On a donc $(Y - \sqrt{\lambda_i} I_p)e_i = 0$, soit $Ye_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$. On en conclut qu'il existe une unique solution positive qui est :
$$Y = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$$

d) Cette question est la conséquence des deux questions précédentes.

3. La matrice $A$ est symétrique réelle. Ses valeurs propres sont 5 et 45. Elle est donc positive. Une matrice de passage diagonalisante orthogonale est :
$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
et
$$\sqrt{A} = P \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

---

**Exercice 2.12.**

1. À tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_4[X]$ on associe $\varphi(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$.

a) Vérifier que $\varphi$ réalise un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

b) Écrire la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

c) Démontrer que $-5$ est valeur propre de $\varphi$.

2. Soit $\lambda$ un nombre réel.

a) Résoudre l'équation différentielle :
$$(E) \qquad f'(x) = \Big[\frac{5+\lambda}{2(x-1)} + \frac{3-\lambda}{2(x+1)}\Big] f(x)$$
d'inconnue $f$.

b) Pour quelles valeurs de $\lambda$ cette équation admet-elle des solutions qui sont des fonctions polynômes ?

c) En déduire des valeurs propres et des sous-espaces propres de $\varphi$.

3. Montrer que pour tout $P$ de $\mathbb{R}_4[X]$ il existe un unique quintuplet $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que :
$$P(X) = \sum_{i=0}^{4} a_i (X-1)^i (X+1)^{4-i}.$$

---

**Solution :**

1. a) $\star$ L'application $\varphi$ est linéaire par linéarité de l'application dérivation.
Si $P = a_4 X^4 + \cdots$, alors :

$$(X^2 - 1)P' = 4a_4 X^5 + \cdots \text{ et } (4X+1)P = 4a_4 X^5 + \cdots$$

Donc $\deg(\varphi(P)) \leqslant 4$, ce qui montre que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

b) La matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. a) L'équation $(E)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On sait la résoudre sur tout intervalle où $x \mapsto \dfrac{5+\lambda}{2(x-1)} + \dfrac{3-\lambda}{2(x+1)}$ est continue soit sur $I_1 = ]-\infty, -1[$, ou $I_2 = ]-1, 1[$, ou $I_3 = ]1, +\infty[$.
Sur chacun de ces intervalles $I_i$, la solution générale est de la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= K_i \exp\left(\frac{5+\lambda}{2} \ln|x-1| + \frac{3-\lambda}{2} \ln|x+1|\right) \\ &= K_i |x-1|^{\frac{5+\lambda}{2}} |x+1|^{\frac{3-\lambda}{2}}, \text{ avec } K_i \text{ réel } (1 \leqslant i \leqslant 3). \end{aligned}$$

b) Une solution (autre que la fonction nulle) est polynomiale si et seulement si :

$$\begin{cases} \dfrac{5+\lambda}{2} = n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{3-\lambda}{2} = m \in \mathbb{N} \\ n + m \leqslant 4 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \lambda = 2n - 5 \\ \lambda = 3 - 2m \\ n + m \leqslant 4 \end{cases}$$

On trouve ainsi 5 solutions, pour $n$ variant de 0 à 4 :
$\to \lambda = -5$ et $f_0(x) = (x+1)^4$
$\to \lambda = -3$ et $f_1(x) = (x+1)^3(x-1)$
$\to \lambda = -1$ et $f_2(x) = (x+1)^2(x-1)^2$
$\to \lambda = 1$ et $f_3(x) = (x+1)(x-1)^3$
$\to \lambda = 3$ et $f_4(x) = (x-1)^4$

c) On a trouvé 5 valeurs propres distinctes ; comme $\dim(R_4[X] = 5$, on sait que ce sont les valeurs propres de $\varphi$ et que $\varphi$ est diagonalisable.

3. La famille $(f_0, \ldots, f_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ de vecteurs propres de $\varphi$. Tout polynôme $P$ de $\mathbb{R}_4[X]$ se décompose dans cette base. C'est la réponse à la question posée.

---

**Exercice 2.13.**

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre 2, symétriques, de rang inférieur ou égal à 1 et dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

1. Donner un exemple d'un élément de $\mathcal{T}$.

2. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $U.{}^tU$ est élément de $\mathcal{T}$.

3. a) Réciproquement, soit $M$ une matrice réelle d'ordre 2 de rang égal à 1. Montrer qu'il existe deux vecteurs non nuls $U, V$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $M = U.{}^tV$.

b) On suppose de plus que $M$ est symétrique. Montrer que la famille $(U, V)$ est liée.

c) En déduire que si $M$ est un élément non nul de $\mathcal{T}$, alors il existe un vecteur $X$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $M = X.{}^tX$.

On définit l'application $\psi$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Soit $p$ un réel de $]0, 1/2[$ et $q = 1 - p$. Soit $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

Dans ce qui suit, on cherche à déterminer $\inf\limits_{M \in \mathcal{T}} \psi(A - M)$.

4. a) Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Exprimer $F(x, y) = \psi(A - U.{}^tU)$ en fonction de $x$ et $y$.

b) Déterminer les points critiques de $F$.

c) En déduire les extremums de $F$.

d) En déduire le minimum de $\psi(A - U.{}^tU)$, lorsque $U$ décrit $\mathbb{R}^2$.

---

**Solution :**

1. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

2. On a : $U{}^tU = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice symétrique de rang inférieur ou égal à 1 car si l'on note $C_1, C_2$ les deux colonnes de $U{}^tU$, on a $C_1 = xU$ et $C_2 = yU$.

3. a) Notons $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à $M$. Si la matrice $M$ est de rang 1, on sait que $\operatorname{Im} f$ est de dimension 1, donc de la forme $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((a, b)\big)$, où $(a, b)$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Les colonnes de $M$ sont alors proportionnelles à la colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu a \\ \lambda b & \mu b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (\, \lambda \quad \mu \,) = U \cdot {}^tV$$

et comme $M \neq 0$, la colonne $V$ n'est pas non plus la colonne nulle.

b) Si la matrice $M$ est en plus symétrique, on a $\lambda b = \mu a$ et :

$\star$ Si $\mu \neq 0$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{b}{\mu} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

$\star$ Si $\lambda \neq 0$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a}{\lambda} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

Donc il existe $\alpha$ réel tel que $V = \alpha U$.

c) Il existe donc $\alpha$ non nul et une colonne $U$ non nulle tels que : $M = \alpha U {}^tU$. Montrons que $\alpha > 0$.
La matrice $M$ est diagonalisable et à valeurs propres positives ou nulles. Si $M$ n'admettait que 0 pour valeur propre, on aurait $M = 0$, ce qui est exclu. On peut donc considérer une valeur propre $\lambda$ de $M$, avec $\lambda > 0$.
Il existe un vecteur colonne $X$ non nul tel que $MX = \lambda X$, soit $\alpha U {}^tUX = \lambda X$. On a donc :

$$ {}^tX\alpha U {}^tUX = \lambda {}^tXX, \text{ soit } \alpha||{}^tUX||^2 = \lambda||X||^2 $$

Donc $\alpha > 0$. On pose alors $X = \sqrt{\alpha}U$ et on a $M = X {}^tX$.

4. a) Après un calcul élémentaire :

$$ F(x, y) = (p - x^2)^2 + 2(xy - q)^2 + (p - y^2)^2 $$

b) On a :

$$ \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = xy^2 - xp - yq + x^3 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x^2y - xp - yq + y^3 \end{cases} $$

Or :

$$ (S) : \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} $$

Soit :

$$ (S) \iff \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ (x - y)(x^2 + y^2 + q - p) = 0 \end{cases} $$

Comme $0 < p < \dfrac{1}{2}$, on a $q > \dfrac{1}{2}$ et $q - p > 0$. Donc le système ci-dessus est équivalent à :

$$ \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ x = y \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} 2x(2x^2 - 1) = 0 \\ x = y \end{cases} $$

Les solutions sont $(0, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

c) Le troisième point critique donnant la même matrice $U {}^tU$ que la solution $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, il ne reste que deux cas à étudier.

• pour $(0, 0)$, en utilisant les notations de Monge, il vient :

$$ H = \begin{pmatrix} -p & -q \\ -q & -p \end{pmatrix} $$

On a donc un point col.

• pour $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, il vient :

$$ H = \begin{pmatrix} 2 - p & p \\ p & 2 - p \end{pmatrix} $$

En ce point $F$ admet un minimum local.

d) Ainsi $F(x, y) = F\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ est un minimum local atteint pour la matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Il reste à montrer que ce minimum est global. Or :
$F(x, y) - F(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2px^2 - 2py^2 - 4qxy + 1$

$= (x^2 + y^2 - 1)^2 + 2q(x - y)^2 \geqslant 0$. D'où le résultat.

**Exercice 2.14.**

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie $n \geqslant 1$. On considère un endomorphisme $u$ de $E$ et on note $\varphi$ l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même définie par :

$$\forall\, v \in \mathcal{L}(E), \varphi(v) = u \circ v$$

1. Vérifier que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $\varphi$, alors $\lambda$ est une valeur propre de $u$.

b) Etablir la réciproque (on pourra faire intervenir un projecteur).

3. a) Notons $E(\lambda, \varphi)$ le sous-espace propre de $\varphi$ associé à la valeur propre $\lambda$ et $E(\lambda, u)$ le sous-espace propre de $u$ associé à la valeur propre $\lambda$.
Montrer que $E(\lambda, \varphi) = \mathcal{L}(E, E(\lambda, u))$.

b) En déduire que $\varphi$ est diagonalisable si et seulement si $u$ est diagonalisable.

---

**Solution :**

1. Il suffit de dire que $u \circ v \in \mathcal{L}(E)$, la linéarité résultant banalement des propriétés des opérations.

2. a) Soit $\lambda$ valeur propre de $\varphi$ : il existe un endomorphisme non nul $v$ de $E$ tel que $u \circ v = \lambda v$. Il existe un vecteur $x$ de $E$ non nul tel que $v(x) \neq 0$ et :

$$u\big(v(x)\big) = \lambda v(x)$$

Ce qui signifie que $\lambda$ est valeur propre de $u$.

b) Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $F$ un supplémentaire de $E_\lambda(u)$ dans $E$ ($E = E_\lambda(u) \oplus F$).
Soit $v$ le projecteur sur $E_\lambda(u)$ de noyau $F$. On a :

$$v(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in E_\lambda(u) \\ 0 & \text{si } x \in F \end{cases}$$

Soit $x \in E$ ; il existe un unique couple $(y, z) \in E_\lambda(u) \times F$ tel que $x = y + z$ et :

$$\begin{aligned} u\big(v(x)\big) &= u\big(v(y) + v(z)\big) = u\big(v(y)\big) = u(y) = \lambda y = \lambda\big(v(y) + v(z)\big) \\ &= \lambda v(x) \end{aligned}$$

Ceci montre que $\lambda$ est une valeur propre de $\varphi$.

3. a) On a :

$$v \in E_\lambda(\varphi) \Longleftrightarrow \forall\, x \in E, u\big(v(x)\big) = \lambda v(x) \Longleftrightarrow \forall\, x \in E, v(x) \in E_\lambda(u)$$

Donc $E_\lambda(\varphi) = \mathcal{L}(E, E_\lambda(u))$.

b) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de $\varphi$. On a

$$\varphi \text{ diagonalisable } \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i}(\varphi) = n^2 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \dim \mathcal{L}(E, E_{\lambda_i}(u)) = n^2$$

$$\iff n \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i}(u) = n^2 \iff \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i}(u) = n$$
$$\iff u \text{ diagonalisable}$$

---

**Exercice 2.15.**

Dans l'exercice, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$ qu'on munit du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1. Pour tout polynôme $P$ de $E$, on note $s(P)$ le polynôme tel que, pour tout réel $x$, $s(P)(x) = P(1-x)$.

a) Montrer que $s$ définit un endomorphisme de $E$.

b) Expliciter, pour $P$ appartenant à $E$, le degré de $s(P)$ en fonction de celui de $P$.

c) Qu'en déduit-on pour la matrice de $s$ dans la base canonique de $E$ ?

d) Montrer que $s$ est diagonalisable.

2. Soit $d$ l'endomorphisme de $E$ tel que pour tout polynôme $P$ de $E$,
$$d(P) = X(1-X)P'' - (2X-1)P'.$$

a) Montrer que pour tout couple $(P, Q)$ d'éléments de $E$,
$$\langle d(P), Q\rangle = -\int_0^1 x(1-x)Q'(x)P'(x)\,dx.$$

b) L'endomorphisme $d$ admet-il pour valeur propre 0 ? Si oui, préciser l'espace propre associé.

c) Montrer que les valeurs propres non nulles de $d$ sont strictement négatives.

d) Montrer que $d$ est diagonalisable.

3. a) Montrer que les sous-espaces propres de $s$ sont stables par $d$.

b) Montrer qu'il existe une base orthonormale de $E$ formée de vecteurs propres communs à $s$ et à $d$.

---

**Solution :**

1. a) On vérifie immédiatement que $s$ est linéaire.

b) Si le polynôme $P$ est de degré $k$, alors $s(P)$ également. Ceci montre que $s$ est un endomorphisme de $E$ ...

c) ... et que la matrice associée à $s$ dans la base canonique est triangulaire supérieure.

d) On a $s^2 = I$, donc $s$ est une symétrie et est diagonalisable.

2. a) On remarque que $d(P) = \dfrac{d}{dx}\big(x(1-x)P'(x)\big)$. Une intégration par parties donne alors :
$$\langle d(P), Q\rangle = \int_0^1 \frac{d}{dx}\big(x(1-x)P'(x)\big)Q(x)\,dx$$

$$= \big[x(1-x)P'(x).Q(x)\big]_0^1 - \int_0^1 x(1-x)P'(x)Q'(x)\,dx$$
$$= -\int_0^1 x(1-x)P'(x)Q'(x)\,dx$$

La symétrie de cette dernière expression montre que $d$ est un endomorphisme symétrique de $E$.

b) Pour tout $\lambda$, $d(\lambda) = 0$, donc 0 est bien valeur propre de $d$.
Soit $P$ tel que $d(P) = 0$. Alors :

$$0 = \langle d(P), P\rangle = -\int_0^1 x(1-x)\big(P'(x)\big)^2\,dx$$

Comme $x \mapsto x(1-x)\big(P'(x)\big)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, il vient $P'(x) = 0$, pour tout $x \in ]0,1[$, puis $P' = 0$, puisque $P'$ a une infinité de racines, ce qui entraîne que $P$ est constant.

Ainsi 0 est valeur propre de $d$ et $E_{(0)}(d) = \operatorname{Ker} d = \mathbb{R}_0[X]$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P$ de $E$ tels que $d(P) = \lambda P$. Alors :

$$\lambda||P||^2.\langle d(P), P\rangle = -\int_0^1 x(1-x)\big(P'(x)\big)^2\,dx \leqslant 0$$

Donc si $\lambda$ est une valeur propre non nulle de $d$, on a $\lambda < 0$.

d) On sait que $d$ est un endomorphisme symétrique de $E$, donc est diagonalisable.

3. a) Comme $s^2 = I$, on sait que les sous-espaces propres possibles de $s$ sont :

$E_1 = \operatorname{Ker}(s - I) = \{P \in E/s(P) = P\}$ et

$E_{-1} = \operatorname{Ker}(s + I) = \{P \in E/s(P) = -P\}$.

• Soit $P \in E_1$, donc tel que $P(1-x) = P(x)$. Alors :

$$d(P)(x) = x(1-x)P''(x) - (2x-1)P'(x)$$

et

$$d(P)(1-x) = (1-x)xP''(1-x) - (1-2x)P'(1-x) = d(P)(x)$$

• Soit $P \in E_{-1}$ donc tel que $P(1-x) = -P(x)$. Alors

$$d(P)(x) = x(1-x)P''(x) - (2x-1)P'(x)$$

et

$$d(P)(1-x) = (1-x)xP''(1-x) - (1-2x)P'(1-x) = -d(P)(x)$$

b) $d_{|E_1}$ est un endomorphisme symétrique de $E_1$ : il existe une base orthonormale de $E_1$ formée de vecteurs propres de $d$.
De même, il existe une base orthonormale de $E_{-1}$ formée de vecteurs propres de $d$.

Comme $E = E_1 \oplus^{\perp} E_{-1}$, il existe une base de vecteurs propres communs à $d$ et $s$.

---

**Exercice 2.16.**

Dans cet exercice, $p$ est un entier naturel non nul fixé. On note $I_p$ la matrice unité d'ordre $p$ et $O_p$ la matrice carrée d'ordre $p$ nulle.
On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

1. On suppose dans cette question qu'il existe deux complexes distincts et non nuls $\lambda$ et $\mu$ et deux matrices non nulles $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ tels que

$$\begin{cases} I_p = A + B, \\ M = \lambda A + \mu B, \\ M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B. \end{cases}$$

a) Vérifier que $(M - \lambda I_p)(M - \mu I_p) = O_p$. Montrer que $M$ est inversible.

b) Exprimer $A$ et $B$ en fonction de $I_p$ et $M$.

c) En déduire que $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA = O_p$. Que peut-on dire de $A$ et de $B$ ?

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \lambda^n A + \mu^n B$, puis que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $M^n = \lambda^n A + \mu^n B$.

e) Montrer que $M$ est diagonalisable et que l'ensemble de ses valeurs propres est $\{\lambda, \mu\}$.

2. On suppose dans cette question qu'il existe un entier $r \geqslant 1$, un $r$-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ de complexes non nuls, deux à deux distincts, et un $r$-uplet $(A_1, A_2, \dots, A_r)$ d'éléments non nuls de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ tels que, pour tout $k \in [\![0, r]\!]$, $M^k = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j^k A_j$.

a) Montrer que le polynôme $P = \prod\limits_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)$ annule $M$. Montrer que $M$ est inversible.

b) Que peut-on dire de l'ensemble des valeurs propres de $M$ ?

c) Soit un entier $n > r$. On note $R$ le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $P$. Montrer que $M^n = R(M)$ et en déduire que $M^n = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j^n A_j$.

---

**Solution :**

1. a) On a :

$$\begin{aligned}(M - \lambda I_p)(M - \mu I_p) &= M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p \\ &= \lambda^2 A + \mu^2 B - (\lambda + \mu)(\lambda A + \mu B) + \lambda\mu(A + B) = 0\end{aligned}$$

La matrice $M$ est inversible, d'inverse $M' = \dfrac{1}{\lambda\mu}\big((\lambda + \mu)I_p - M\big)$, puisque l'on vérifie aisément que $MM' = I_p$.

b) On a $M - \mu I_p = (\lambda - \mu)A$. Comme $\lambda \neq \mu$, on a : $A = \dfrac{1}{\lambda - \mu}(M - \mu I_p)$

De même : $B = \dfrac{1}{\mu - \lambda}(M - \lambda I_p)$

c) Comme $M$ et $I_p$ commutent, on peut écrire :

$$A^2 = \frac{1}{(\lambda - \mu)^2}(M - \mu I_p)^2 = A$$

et de même $B^2 = B$ et $AB = BA = 0$.
Les matrices de $A$ et $B$ sont donc celles de projecteurs supplémentaires.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $A$ et $B$ commutent :

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} A^k B^{n-k} = \lambda^n A + \mu^n B$$

car $AB = 0$ et $A^k = A, B^k = B$, pour $k \geqslant 1$.
D'autre part $\left(\frac{1}{\lambda}A + \frac{1}{\mu}B\right)(\lambda A + \mu B) = A + B$. Donc

$$M^{-1} = \frac{1}{\lambda}A + \frac{1}{\mu}B$$

On déduit comme ci-dessus que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ :

$$M^n = \lambda^n A + \mu^n B$$

e) La matrice $A$ est celle d'un projecteur. Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont contenues dans l'ensemble $\{0, 1\}$.
Mais, comme $A \neq 0$ et $B \neq 0$, on a $A \neq 0$ et $A \neq I$, donc $\mathrm{Spec}(A) = \{0, 1\}$.
Comme $M = (\lambda - \mu)A + \mu I_p$, la matrice $M$ est diagonalisable et

$$\mathrm{Spec}(M) = \{(\lambda - \mu) \times 1 + \mu, (\lambda - \mu) \times 0 + \mu\} = \{\lambda, \mu\}.$$

2. a) Notons $P(X) = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j) = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$.
Alors :

$$\begin{aligned} P(M) &= \sum_{k=0}^{r} a_k M^k = \sum_{k=0}^{r} a_k \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j^k A_j\right) = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=0}^{r} a_k \lambda_j^k\right) A_j \\ &= \sum_{j=1}^{r} P(\lambda_j) A_j = 0 \end{aligned}$$

Le polynôme $P$ est ainsi annulateur de $M$.
Le monôme de degré 0 de $P$ est $a_0 = (-1)^r \prod_{j=1}^{r} \lambda_j$. Il est non nul. En conséquence, en notant $Q$ le quotient de la division euclidienne de $P$ par $X$, on a $P = XQ + a_0$, donc $0 = P(M) = MQ(M) + a_0 I_p = Q(M)M + a_0 I_p$.
En posant $M' = -\frac{1}{a_0} Q(M)$, on a $MM' = M'M = I_p$. La matrice $M$ est donc inversible.

b) Comme le polynôme $P$ annule $M$, les valeurs propres de $M$ sont incluses dans l'ensemble des racines de $P$ soit $\mathrm{Spec}(M) \subset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$.

c) On sait que $R$ est de degré strictement inférieur à $r$. Soit $Q$ le quotient de la division euclidienne de $P$ par $X^n$, soit $X^n = PQ + R$. Il s'ensuit que

$$M^n = Q(M)P(M) + R(M) = R(M)$$

Comme dans la question 2. a, on montre que $R(M) = \sum_{j=1}^{r} R(\lambda_j) A_j$.
Or pour tout $j \in [\![1, r]\!]$ :

$$\lambda_j^n = Q(\lambda_j)P(\lambda_j) + R(\lambda_j) = R(\lambda_j)$$

On conclut que

$$M^n = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j^n A_j$$