

La lettre $\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On considère un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle E .

Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de E vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes) de f et $F_1, F_2, \dots, F_p$ les sous-espaces propres de f respectivement associés, ainsi que $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$ les valeurs propres (distinctes) de g et $G_1, G_2, \dots, G_q$ les sous-espaces propres de g respectivement associés.

Enfin, pour $(i, j) \in \{1, 2, \dots, p\} \times \{1, 2, \dots, q\}$, on note $H_{i,j} = F_i \cap G_j$.

1. Pour $k \in \{1, 2, \dots, p\}$, on définit le polynôme $L_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p \frac{X - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}$

1. a) Soit $(k, j) \in \{1, 2, \dots, p\}^2$. Montrer que, quel que soit $v \in F_j$:

$$L_k(f)(v) = \begin{cases} 0_E & \text{si } k \neq j, \\ v & \text{si } k = j. \end{cases}$$

b) Soit maintenant U un sous-espace de E stable par f .

Montrer que, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p\}$, U est stable par $L_k(f)$.

Déduire des deux résultats précédents que $U \subset \bigoplus_{i=1}^p (U \cap F_i)$.

Conclure que $U = \bigoplus_{i=1}^p (U \cap F_i)$.

Montrer enfin que l'endomorphisme de U induit par f est diagonalisable.

2. Montrer que, quel que soit $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, G_j est stable par f .

3. Montrer que, quel que soit $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, $G_j = \bigoplus_{i=1}^p H_{i,j}$.

4. En déduire qu'il existe une base de E entièrement constituée de vecteurs propres la fois de f et de g .

5. Montrer que tout endomorphisme de E appartenant à $\text{Vect}(id, f, g, g \circ f)$ est diagonalisable.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère une matrice $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ strictement stochastique, ce qui signifie que les coefficients $p_{i,j}$ de P sont tous des réels *strictement* positifs et que, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1$.

Bien que les coefficients de P soient réels, nous considérons dans la suite que P appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il s'ensuit que les valeurs propres de P sont éléments de $\mathbb{C}$ et que ses colonnes propres sont éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de P et donner l'exemple d'une colonne propre de P associée à 1.

2. Montrer que toute valeur propre λ de P est de module inférieur ou égal à 1.

On considérera une colonne propre de P associée à λ et on utilisera la norme infinie canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

3. Montrer que toute valeur propre λ de P de module égal à 1 est elle-même égale à 1 et que son sous-espace propre associé est une droite (à préciser).

On considérera une colonne propre C de P associée à λ telle que $\|C\|_\infty = 1$ et on montrera que les parties réelles des composantes de C sont toutes égales.

4. Montrer que toute matrice strictement stochastique appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable et préciser, en fonction de ses coefficients, ses valeurs propres ainsi qu'une base de colonnes propres.

5. Quelles sont les valeurs propres de la matrice strictement stochastique :

$$M_1 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Est-elle diagonalisable ?

La matrice strictement stochastique $M_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

On considère la fonction $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par la relation $\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} dt$.

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, quel que soit $u \in \mathbb{R}$, $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$.

2. En déduire que, pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$:

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) + h \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t dt| \leq \frac{1}{2} h^2 e^{|h|} \varphi(x).$$

3. En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = - \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \sin t dt.$$

Indiquer sans démonstration pourquoi φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée seconde.

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) < 0$ et $\varphi''(x) > 0$.

5. Étudier la variation de $x \mapsto x - \varphi(x)$ et montrer qu'il existe un et un seul réel x tel que $\varphi(x) = x$.

On note α ce réel. Montrer que $0 < \alpha < 1$. *On justifiera (et utilisera) que, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$. On admettra que $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-1}) < 0,993$.*

On considère maintenant une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

6. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) > 0$ et $\varphi(\varphi(x)) < \frac{\pi}{2}$.

(Par conséquent, $0 < u_2 < \frac{\pi}{2}$.)

Montrer aussi que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $-1 < \varphi'(x) < 0$.

7. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $u_2 = \alpha$?

8. On suppose que $u_2 < \alpha$. Montrer que $u_2 < \alpha < u_3$ et plus généralement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} < \alpha < u_{2n+1}$.

Montrer que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ croît et que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît.

Montrer que, pour tout $x \in [u_2, u_3]$, $|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(u_2)| < 1$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

9. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $u_2 > \alpha$?

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt$ converge.

On note $f(x)$ sa valeur.

Montrer de même que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt$ converge.

Montrer enfin que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$ converge et préciser sa valeur.

2. Soit $(x, h) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$|\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt) + 2ht \sin(2xt)| \leq 2h^2 t^2.$$

En déduire que :

$$|f(x+h) - f(x) + 2h \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt| \leq 2h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

3. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt.$$

4. Au moyen d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2xf(x).$$

En déduire que la fonction $x \mapsto e^{x^2} f(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et calculer la valeur de cette constante (*on recherchera pour cela la valeur de f en 0*).

En conclusion, quelle est, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de $f(x)$?

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sin(2xt) dt$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos^2(xt) dt$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sin^2(xt) dt$ convergent et calculer leurs valeurs respectives.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \sqrt[3]{\sum_{k=0}^n u_k}$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et déterminer sa limite.
3. Montrer que $u_{n+1} \underset{(+\infty)}{\sim} u_n$ et $u_{n+1} - u_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{3u_n}$.

Quelle est la nature de la série de terme général $v_n = \frac{1}{u_n}$?

4. Ecrire une fonction Pascal de deux variables n et a permettant de calculer u_n lorsque $u_0 = a$.

On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles définies et continues sur le segment $[0, 1]$.

Soit $u : f \in E \mapsto u(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1], u(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt.$$

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E .
2. Soient f et g deux fonctions de E telles que $u(f) = g$.
 - a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.
 - b) Calculer $g(0)$ et $g'(1)$.
3. Montrer que u est injectif.
4. Déterminer l'image $\text{Im } u$ de u .
5. On pose, pour $x \in [0, 1]$, $f_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et $f_2(x) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$.
 - a) Vérifier que (f_1, f_2) est une famille libre de E .
 - b) Soit F le sous espace vectoriel engendré par $\{f_1, f_2\}$. Montrer que F est stable par u .
 - c) Donner dans la base (f_1, f_2) la matrice de la restriction à F de u .
 - d) Généraliser, en posant $f_k : x \mapsto \sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right)$.

Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$.

1. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Rappeler les valeurs de $f(0)$ et de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. a) Montrer que : $\forall x > 0, xf(x) < e^{-x^2/2}$.

b) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et la calculer.

3. a) On pose $I(a, b) = \int_a^b e^{2u(1-u)} du$. Calculer $I(a, b)$ en fonction de f , a et b .

b) En déduire la convergence et la valeur de $\int_{1/2}^{+\infty} e^{2u(1-u)} du$.

4. On pose, pour x réel, $g(x) = \int_x^{+\infty} e^{2u(1-u)} du$.

Montrer que l'intégrale $J = \int_{1/2}^{+\infty} g(x) dx$ converge et la calculer.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout endomorphisme u de E et pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u^m est défini par :

$$u^0 = Id, \forall m \geq 1, u^m = u \circ u^{m-1}.$$

On note D l'application dérivation qui à tout $P \in E$ associe le polynôme dérivée P' .

Soit f un endomorphisme de E vérifiant :

$$(\star) \text{ il existe } (k, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ tels que } f^k = D^m$$

1. Montrer que D est un endomorphisme surjectif de E . En déduire que f est un endomorphisme surjectif de E .
2. Déterminer $\text{Ker } D^m$.
3. Montrer que pour tout $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\text{Ker } f^p$ est de dimension finie.
4. Soit $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$ et φ l'application définie sur $\text{Ker } f^p$ par $\varphi(P) = f(P)$.
 - a) Montrer que φ est une application linéaire de $\text{Ker } f^p$ dans $\text{Ker } f^{p-1}$.
 - b) Déterminer son noyau et montrer que φ est surjective.
 - c) Déterminer une relation entre la dimension de $\text{Ker } f^p$ et celle de $\text{Ker } f^{p-1}$.
5. En déduire la dimension de $\text{Ker } f^p$ en fonction de p et de la dimension de $\text{Ker } f$.
6. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la relation $(\star)$ soit vérifiée.

Pour tout $(r, s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à r lignes et s colonnes à coefficients réels.

Dans cet exercice, n et p désignent deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1 et A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^tAA = 0$ si et seulement si $A = 0$.

On suppose désormais que $A \neq 0$.

2. Montrer que les matrices tAA et $A {}^tA$ sont toutes deux diagonalisables dans une base orthonormée.

3. A tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, on associe la norme : $\|X\|_r = \sqrt{{}^tXX}$.

a) Soit W un vecteur propre de tAA associé à une valeur propre λ . Calculer $(\|AW\|_n)^2$ en fonction de λ et $\|W\|_p$.

b) En déduire que les valeurs propres de tAA sont des réels positifs ou nuls.

4. a) Montrer que tAA et $A {}^tA$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

b) Montrer que $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker } A$ et que $\text{Ker}(A {}^tA) = \text{Ker } {}^tA$. En déduire que tAA et $A {}^tA$ ont même rang.

c) Quelle relation existe entre les valeurs propres de ces deux matrices ?

1. a) Déterminer l'ensemble I des réels x pour lesquels la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k x^k$ converge.

b) Pour tout $x \in I$, calculer $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on pose : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k x^k$.

Calculer $R_n(x)$ et montrer que la série $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$ converge.

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x)$.

2. Soit (u_n) une suite réelle positive telle que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Calculer $\sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k u_k$ en fonction de n et R_n .

b) Montrer que si la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 0} n u_n$ converge.

3. a) On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} n u_n$ converge. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) R_n$?

b) En déduire que les séries $\sum_{n \geq 0} R_n$ et $\sum_{n \geq 0} n u_n$ sont de même nature et qu'en cas de convergence, elles ont la même somme.

3. Application. Dans cette question $u_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

a) Pour quelles valeurs de x la série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est-elle convergente ?

On note alors : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$

Pour quelles valeurs de x la série $\sum_{n \geq 0} R_n(x)$ est-elle convergente ? Exprimer sa somme en fonction de $\zeta(x-1)$.

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite telle que pour tout $n \geq 1$, $u_n \in]-1, 1[$.

Pour tout $n \geq 1$, on note $p_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k)$.

1. a) On suppose dans cette question que $u_n = \frac{1}{n}$. La suite (p_n) a-t-elle une limite ?

b) On suppose maintenant que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [0, 1[$. Montrer que la suite (p_n) admet une limite finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

c) **Application.** Déterminer la limite de la suite (p_n) lorsque $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$.

2. a) On suppose dans cette question que $u_1 = 0$ et $u_n = -\frac{1}{n}$ pour $n \geq 2$. La suite (p_n) a-t-elle une limite ?

b) On suppose maintenant que $u_n \in]-1, 0[$, pour tout $n \geq 1$. Que peut-on dire de la suite (p_n) si la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge ?

c) Montrer que la suite (p_n) admet une limite $\lambda > 0$ si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

d) **Application.** Déterminer la limite de la suite (p_n) lorsque l'on a $u_1 = 0$ et $u_n = -\frac{2}{n(n+1)}$, pour $n \geq 2$.

3. On suppose maintenant que u_n est de signe quelconque et que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est absolument convergente. Que peut-on conclure sur la suite (p_n) ?

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (x, 0, y)$.

1. Déterminer le noyau et l'image de f .
2. Soit $E = \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Déterminer $f(E)$ et $f^{-1}(E)$.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Soit a un réel positif ou nul. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_a(x) = x^3 + ax - 1$.

1. Montrer que ce polynôme admet une unique racine réelle $u(a)$.

On note u l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ qui à tout réel a associe $u(a)$.

2. Montrer que $u(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}^{+*}$.

3. Montrer que l'application u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

4. Calculer $u(0)$, puis $\lim_{a \rightarrow +\infty} u(a)$.

5. Montrer que u est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

6. Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'elle est également dérivable à droite en 0. Calculer pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $u'(a)$, ainsi que la valeur de la dérivée à droite en 0.

7. Déterminer l'application réciproque de u .

8. Esquisser l'allure de la courbe représentant u .

Soient $n \geq 3$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n , $b \in \mathbb{R}$ et $\varphi : E \rightarrow E, f \mapsto \varphi(f)$ défini par :

$$\varphi(f)(x) = (x - b)(f'(x) + f'(b)) - 2(f(x) - f(b)).$$

où f' désigne la dérivée du polynôme f .

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .

2. Déterminer le plus grand entier k vérifiant :

$$\forall f \in E, \exists \delta \in E, \varphi(f)(x) = (x - b)^k \delta(x).$$

3. Déterminer le noyau et l'image de φ .

4. Déterminer, pour $k \geq 3$, $\varphi(f)$ lorsque $f(x) = (x - b)^k$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?

Soit u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ défini, dans la base canonique de cet espace, par la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. a) Déterminer $u \circ u \circ u$.
b) En déduire tous les sous-espaces de dimension 1 stables par u .
2. Soit P un plan stable par u et soit v la restriction de u à P .
 - a) Montrer que v n'est pas l'endomorphisme nul.
 - b) Montrer que $v \circ v = 0$.
 - c) Montrer qu'il existe x dans P tel que $(x, v(x))$ est une base de P .
 - d) Comparer P et l'image de u . Conclure.
3. Déterminer tous les sous-espaces de E stables par u .

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \geq 2$ et soit u un endomorphisme de E .

1. Dans cette question uniquement on suppose qu'il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

a) Montrer que $u \circ p = 0$.

b) En déduire que $u \circ u = 0$.

2. Dans cette question uniquement on suppose que $u \circ u = 0$.

a) Montrer que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.

b) Soit H un sous-espace vectoriel de E tel que : $\text{Im}(u) \subset H \subset \text{Ker}(u)$ et soit S un supplémentaire de H . Soit q la projection sur H parallèlement à S . Calculer $q \circ u - u \circ q$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

Cette condition étant supposée remplie, y-a-t'il toujours unicité du projecteur p ?

4. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est égale à $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer un projecteur p de E tel que $p \circ u - u \circ p = u$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{n \cdot e^{-t}}{1 + nt} dt$ est convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n cette intégrale.
2. a) Soit $J_n = \int_{1/n}^1 \frac{e^{-u}}{u} du$. Montrer que J_n est équivalent à $\ln(n)$ lorsque n tend vers l'infini.
 b) En déduire une constante C telle que I_n soit équivalent à $C \ln(n)$ pour n tendant vers l'infini.
3. a) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles la série de terme général $\frac{n \cdot e^{-k}}{1 + nk}$ (k décrivant $\mathbb{N}$) est convergente. On note alors $S(n)$ sa somme.
 b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 \leq S(n) - n \leq I_n$.
 c) En déduire une constante D telle que $S(n)$ soit équivalent à nD lorsque n tend vers l'infini.

Soit p un entier tel que $p \geq 2$. On note $\mathcal{H}_p$ l'ensemble des suites réelles $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}_p$ est un espace vectoriel réel de dimension p .
2. Montrer que l'application φ définie sur $\mathcal{H}_p$ par, pour tout $U = (u_n) \in \mathcal{H}_p$:

$$\varphi(U) = \sum_{k=0}^{p-1} u_k$$

est linéaire.

3. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que la série $\sum u_n x^n$ converge.

On pose $f_U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Calculer $f_U(x)$ en fonction de $P_U(x)$ où $P_U = \sum_{k=0}^{p-1} u_k X^k$.

En déduire que $f_U(x)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures si et seulement si $U \in \text{Ker } \varphi$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$.

Montrer que cette intégrale est convergente. Calculer I_0 et I_1 .

Étudier la monotonie de la suite (I_n) . En déduire sa convergence.

2. a) Montrer que $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$, puis la limite de la suite (I_n) .

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \sqrt{n}I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1}I_n$.

Montrer que les suites (J_n) et (K_n) sont adjacentes.

En déduire l'existence d'un réel α strictement positif tel que $I_n \sim \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ au voisinage de $+\infty$.

4. a) A l'aide de la relation de récurrence de la question 2. a), trouver une expression de I_n utilisant C_{2n}^n .

b) On admettra la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Déterminer α .

Dans tout l'exercice on confond polynôme et fonction polynôme associée.

1. On considère l'application $\Phi : (\mathbb{R}[X])^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(P, Q) = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Démontrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ qu'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle orthogonale pour ce produit scalaire?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout polynôme non nul A de degré a inférieur ou égal à n on note R_A l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui, au polynôme P , associe le reste de la division euclidienne de P par A .

2. Dans cette question, on suppose que $n = 3$ et que $A(X) = 1 + X + X^2$.

Donner la matrice de R_A sur la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Préciser le noyau et l'image de R_A .

3. Dans la suite, n est un entier supérieur ou égal à 2 et A un polynôme de degré a non nul.

a) Montrer que R_A est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que R_A est un projecteur dont on déterminera le noyau et l'image en en donnant des bases respectives.

c) Donner les valeurs propres de R_A ainsi que les sous-espaces propres associés.

Préciser les cas $a = 0$ et $a = n$.

4. a) On suppose que A n'admet pas de racine réelle dans $[0, 1]$.

Montrer alors que 1 et A ne sont pas orthogonaux pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

b) On suppose a est supérieur ou égal à 1 et que A admet une racine réelle x_0 appartenant à $[0, 1]$, c'est-à-dire que $A = (X - x_0)B$ où B est un polynôme de degré $a - 1$.

Montrer que B et $(X - x_0)^2 B$ ne sont pas orthogonaux.

c) En déduire que si $a \neq 0$ et $a \neq n$, R_A n'est pas un projecteur orthogonal.

On rappelle que la donnée d'une fonction polynomiale sur $[0, 1]$ définit entièrement cette fonction sur $\mathbb{R}$.

1. A toute fonction polynomiale P de $\mathbb{R}[X]$ on associe la fonction $\varphi(P)$ définie sur $[0, 1]$ par :

$$\varphi(P)(x) = \sqrt{1-x} \int_x^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t}} dt.$$

a) Rappeler pourquoi la famille $\mathcal{B} = (1, 1-X, \dots, (1-X)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, l'image par φ de $(1-X)^p$.

c) Montrer que l'application $P \mapsto \varphi(P)$ définit une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, préciser le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P .

d) L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ? Quelles sont les valeurs propres éventuelles de φ ?

2. a) Soit F_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ de base $\mathcal{B}'$ définie par :

$$\mathcal{B}' = ((1-X), (1-X)^2, \dots, (1-X)^{n+1}).$$

Montrer que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) = F_n$.

Soit Ψ_n la restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ comme ensemble de départ et à F_n comme ensemble d'arrivée.

b) Écrire la matrice M_n de Ψ_n relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

En déduire que Ψ_n est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur F_n . Déterminer M_n^{-1} ainsi que $\Psi_n^{-1}((1-X)^k)$ pour $1 \leq k \leq n+1$.

Préciser les valeurs propres de M_n .

c) Soit k un entier tel que $2 \leq 2k \leq n$. Soit $P_k(X) = X^k(1-X)^k$.

Montrer que P_k est un élément de F_n . Le décomposer sur la base $\mathcal{B}'$.

Déterminer $\Psi_n^{-1}(P_k)$. En déduire les antécédents de P_k par φ .

Soit α un réel strictement supérieur à 1.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose alors $u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n(\alpha) = \alpha n(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$$

Donner alors une expression de $u_n(\alpha)$ en fonction de $u_1(\alpha)$.

3. a) Étudier la monotonie de la suite $(u_n(\alpha))$. En déduire sa convergence.

b) En partageant l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ en trois intervalles, à l'aide des points b et 1, démontrer que, pour tout réel b de $]0, 1[$, on a :

$$u_n(\alpha) \leq b + \frac{1}{(1+b^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}$$

c) Donner alors la valeur de la limite de la suite $(u_n(\alpha))$.

4. On pose, pour tout entier n non nul : $w_n(\alpha) = \ln(u_n(\alpha)) + \frac{\ln(n)}{\alpha}$.

a) Démontrer que la série de terme général $(w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha))$ est convergente (utiliser la formule de la question 2 puis un développement limité).

b) En déduire l'existence d'un réel $K(\alpha)$ tel que $u_n(\alpha)$ soit équivalent à $\frac{K(\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$, lorsque n tend vers l'infini.

Soit A la matrice d'ordre 3 définie par

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note également $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire canonique de deux vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$.

1. a) Déterminer les valeurs propres de A

(on pourra utiliser la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$).

b) l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Soit e un vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre -1 . Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, il existe un réel $\lambda(u)$ tel que

$$u = \lambda(u)e + u', \text{ avec } \langle u', e \rangle = 0$$

Déterminer $\lambda(e)$.

3. Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, f(u) \rangle = 0\}$.

a) Montrer que $u \in F$ si et seulement si $|\lambda(u)| = \|u'\|$.

b) Soient $(u, v) \in F^2$. Montrer que $u + v \in F$ si et seulement si (u, v) est lié.

c) Quels peuvent être les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ inclus dans F ?

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels. On lui associe la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ définie, pour tout $n \geq 0$, par :

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

Pour tout x réel tel que les séries suivantes convergent, on pose

$$a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, \quad A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \frac{x^n}{n!}$$

1. Dans cette question, on suppose que pour tout $n \geq 0$, $a_n = (-1)^n$.

a) Déterminer le domaine de définition des fonctions a et A .

b) Déterminer, si elle existe, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} A(x)$.

c) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} a(x) dx$ converge et déterminer sa valeur.

2. Soit α un réel non nul. On pose dans cette question, pour tout $n \geq 0$, $a_n = \alpha^n$.

a) Déterminer le domaine de définition des fonctions a et A .

b) Déterminer, suivant les valeurs de α , l'existence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} A(x)$.

c) Pour quelles valeurs de α , l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} a(x) dx$ converge-t-elle ?

Déterminer alors sa valeur.

3. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ est convergente. On note

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

a) Soit (c_n) une suite de réels tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{x^n}{n!} \right) = 0$$

b) En utilisant le reste de la série convergente $\sum_n a_n$, montrer que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} A(x)$ existe et la calculer.

Soient $A = (0, 1)$, $B = (-1, 1)$, $C = (-1, -1)$, $D = (0, -1)$ quatre points du plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = -2x^3 - x^2 - y^2 + 5$.

1. Montrer que la restriction de f au rectangle $ABCD$ (notée $\tilde{f}$) est bornée.
2. Déterminer le maximum et le minimum de $\tilde{f}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n . Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\Phi : P \longmapsto X(1 - X)P'' + (1 - 2X)P'$$

Pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on considère le polynôme $U_p = X^p(1 - X)^p$ et $L_p = \frac{1}{p!}(U_p)^{(p)}$, où $(U_p)^{(p)}$ désigne la dérivée d'ordre p de U_p .

1. Vérifier que Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner la matrice de Φ relativement à sa base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

2. Donner les valeurs propres de Φ . Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

3. Calculer le degré et le coefficient dominant de L_p .

4. On pose $L_p = \sum_{k=0}^p \ell_{p,k} X^k$. Démontrer que :

$$\ell_{p,k} = (-1)^k C_p^k C_{p+k}^k$$

5. a) Trouver une relation de récurrence entre $\ell_{p,k}$ et $\ell_{p,k+1}$.

b) Écrire un programme Pascal permettant d'obtenir les coefficients de L_p .

En voici l'entête :

```
Program Calcul ;
Const Deg_Max = 100 ;
Type Polynome = Array[0..Deg_Max] Of LongInt ;
Procedure Calcul_Lp(
```

6. Montrer que L_p est vecteur propre de Φ .

1. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Soit f_A l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par, pour tout $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$f_A(X) = XA$$

a) Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer M sa matrice associée dans la base $\mathcal{B}$.

b) En déduire la trace de f_A (ou de M). (La trace d'une matrice carrée est la somme des éléments de sa diagonale principale et on rappelle que deux matrices semblables ont la même trace).

c) Montrer que f_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On souhaite maintenant généraliser la question précédente. Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

Soit C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f_C l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\text{pour tout } X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f_C(X) = XC.$$

a) Montrer que si C est p -nilpotente (c'est-à-dire si $C^p = 0$) il en est de même pour f_C .

b) Déterminer la trace de f_C (on pourra commencer par calculer $f_C(E_{i,j})$).

c) Montrer que f_C est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si C est inversible.

1. Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = e - 1$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = -1 + nu_{n-1}$.

Quelles sont les limites possibles de cette suite ?

2. Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

a) Déterminer la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers l'infini.

b) Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} .

c) En déduire la limite de la suite (u_n) puis que :

$$I_n = n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$$

3. Soit a un nombre réel et soit $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $v_0 = a - 1$ et pour tout $n \geq 1$, $v_n = -1 + nv_{n-1}$.

Montrer que si $a \neq e$, la suite (v_n) est divergente.

4. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{u_{n+2}}{(n+2)(n+1)} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

En déduire que u_n est équivalent à $\frac{1}{n}$ lorsque n tend vers l'infini.

5. Pourquoi la plupart des calculatrices sur lesquelles on programme la suite (u_n) vous inciteront à une mauvaise conclusion sur la limite de cette suite ?

On considère l'espace $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $p \geq 2$ à coefficients réels.

Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on pose :

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p$$

Si $x \in \mathbb{R}^p$, on note par $\|x\|$ la norme euclidienne du vecteur x (ainsi $\|x\|^2 = \langle x | x \rangle$). Si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$, on désigne par $E^\perp$ le sous espace des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de E .

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $\text{Im}(B) \subseteq \text{Im}(A)$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^p$. Montrer qu'il existe un unique vecteur y appartenant à $(\text{Ker}(A))^\perp$ tel que $Bx = Ay$. On notera $u(x)$ cet unique vecteur y .

b) Vérifier que l'application u ainsi définie est linéaire. On notera X sa matrice.

c) Montrer que X est l'unique matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$B = AX, \text{ Ker } X = \text{Ker } B \text{ et } \text{Im}(X) \subseteq (\text{Ker } A)^\perp.$$

On appelle cette solution X la *solution réduite* de l'équation $AY = B$, d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que l'équation $AY = B$, dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, admet au moins une solution si et seulement si $\text{Im}(B) \subseteq \text{Im}(A)$. A quelle condition cette équation admet-elle une unique solution ?

3. Dans cette question, on se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que l'équation $AY = B$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet des solutions.

b) Déterminer la solution réduite de cette équation.

On considère deux nombres réels strictement positifs u_0 et v_0 . On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ en posant pour $n \geq 0$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} [u_n + v_n] \\ \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \right] \end{cases}$$

1. Soient a et b deux réels strictement positifs, montrer que l'on a :

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

2. On se propose de montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

- a) Montrer par récurrence que $v_n \leq u_n$ pour tout entier $n \geq 1$.
- b) Prouver que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
- c) Terminer en montrant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

3. Déterminer la limite commune des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$.

On désignera par $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(t) = t - \ln(t) - \frac{1}{t}.$$

- a) Etudier les branches infinies de f .
- b) Faire une étude des variations, de la convexité de f et donner une représentation graphique de f .
- c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2. On considère la fonction g définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par

$$g(x, y) = x \ln y - y \ln x$$

- a) Montrer que g est de classe C^∞ .
- b) Calculer les dérivées partielles du premier et du second ordre de g .
- c) Etudier l'existence d'extremums locaux ou globaux de g .

1. Étudier la convergence de la suite de terme général $p_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$
2. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs telle que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

Montrer que la série de terme général u_k converge.

[On pourra chercher à majorer $\sigma_p = \sum_{k=1}^{2^p} u_k$, pour $p \geq 1$.]

Soit f l'application définie par : $f(x) = \exp(-\lambda x^2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda > \frac{e}{2}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ sur $\mathbb{R}$ et que ℓ vérifie : $\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} < \ell < 1$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes.

3. a) On pose $g = f \circ f$. Montrer que l'équation $g(x) = x$ ne peut admettre de solution que sur $]0, 1[$. Vérifier que $g(\ell) = \ell$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet trois solutions sur $]0, 1[$: a, b et ℓ . Vérifier que ℓ est strictement compris entre a et b .

c) Déterminer les limites des suites (u_{2n}) et de (u_{2n+1}) .

1. On rappelle que $\forall \theta_1 \in \mathbb{R}, \forall \theta_2 \in \mathbb{R}, \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$.

Soit $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ et $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ deux nombres complexes non nuls.

Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur θ_1 et θ_2 pour que :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

Généraliser à n nombres complexes ($n \geq 3$), c'est-à-dire, si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z_k = \rho_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$, déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ pour que :

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

2. Soit n un entier naturel, $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, a_{i,j} \in \mathbb{R}_+^*$$

On suppose de plus que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

a) Montrer que le réel 1 est valeur propre de A .

b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A , alors $|\lambda| \leq 1$, et si $|\lambda| = 1$, alors $\lambda = 1$.

3. On suppose la matrice A diagonalisable. Que peut-on dire de la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Dans les questions 1. et 2. on ne suppose pas que E est de dimension finie.

1. Soit f une **application** de E dans E . Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) : $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x) | y \rangle = -\langle x | f(y) \rangle$
- (ii) : $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall x \in E, \langle f(x) | x \rangle = 0$. ($\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E .)

f est dite antisymétrique si et seulement si elle vérifie (i) ou (ii).

2. Soit f un endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) et f antisymétrique.

- a) Montrer que $\text{Ker } f$ est orthogonal à $\text{Im } f$.
- b) On pose $s = f \circ f$. Montrer que
 - s est symétrique (c'est-à-dire, $\forall (x, y) \in E^2, \langle s(x) | y \rangle = \langle x | s(y) \rangle$),
 - toute valeur propre de s est réelle et négative ou nulle et $\text{Im } s \subset \text{Im } f$
 et $\text{Ker } s = \text{Ker } f$.

3. On suppose que E est de dimension finie et l'on considère une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E . Montrer qu'un endomorphisme f de E est antisymétrique si et seulement si la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^t A = -A$.

On considère la suite de polynômes $(P_n)_n$ définis par $P_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_{n+1} est la primitive de P_n pour laquelle on a $\int_{-1}^1 P_{n+1}(t)dt = 0$.

1. Déterminer P_1 .

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si P_n est une fonction impaire, il en est de même de P_{n+2} .

En déduire que pour tout n impair différent de 1, $P_n(1) = 0$.

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{-1}^1 tP_n(t)dt = 2P_{n+1}(1)$$

4. On considère sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$, l'application :

$$\phi : (P, Q) \mapsto \phi(P, Q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

5. Soient m et n deux entiers vérifiant $m \geq n > 0$. Justifier les égalités :

$$\phi(P_n, P_m) = (-1)^{n-1} P_{m+n}(1) \text{ et } \phi(P_n, P_0) = 0$$

6. On pose $E_n = \text{Vect}\{P_{2k}, 0 \leq 2k \leq n\}$ et $F_n = \text{Vect}\{P_{2k+1}, 0 \leq 2k+1 \leq n\}$.

Montrer que E_n et F_n sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $R_n[X]$.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle, continue et périodique de période $T > 0$. On note :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

1. Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_k = \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|f(t)|}{t} dt \quad (k \geq 1)$$

2. On suppose $M \neq 0$.

a) Montrer que $F(x) \underset{(+\infty)}{\sim} Mx$.

b) L'intégrale $I = \int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est-elle convergente ?

3. On suppose $M = 0$.

Montrer que l'intégrale $I = \int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est convergente mais non absolument convergente.

Pour α et β réels, on considère l'intégrale

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta dt$$

1. Déterminer et représenter le domaine de définition D de I :

$$D = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, I(\alpha, \beta) \text{ converge} \right\}$$

2. a) Montrer que, pour $(\alpha, \beta) \in D$,

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} (1 - e^{-x})^\beta dx$$

b) Calculer $I(n, 0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3. a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $(\alpha, 0) \in D$, on a :

$$I(\alpha, n) = \Gamma(\alpha + 1) \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{C_n^k}{(k+1)^{\alpha+1}}$$

b) En déduire un équivalent de $I(\alpha, n)$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, à n fixé.

c) Déterminer $\lim I(\alpha, n)$ lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, à n fixé.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ et f la fonction définie sur D par

$$f(x, y) = (y - x)^2 + 6xy$$

1. La fonction f admet-elle des extremums ?
 2. Déterminer les points critiques de f . Effectuer la réduction de Gauss « en carrés » de $f(x, y)$ et en déduire les extremums de f .
- Déterminer et représenter sur un schéma le signe de f sur D .

1. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \int_0^a \frac{t^n e^t}{1+t^n} dt \leq \frac{e}{n+1}$

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{e^t}{1+t^n} dt = e^a - 1$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On note F_n l'application de $[0, +\infty[$ dans lui-même définie par $F_n(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t^n} dt$.

a) Montrer que F_n est une bijection. On note x_n sa bijection réciproque ; ainsi, pour tout réel y positif ou nul, $x_n(y)$ est l'unique réel positif ou nul tel que $\int_0^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt = y$.

b) Préciser le sens de variation de la fonction $x_n : y \mapsto x_n(y)$ ainsi que sa limite en $+\infty$.

c) Montrer que x_n est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Dans cette question y est fixé tel que $y < e - 1$.

a) Démontrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $x_n(y) < 1$.

b) Pour $n \geq N$, comparer les trois réels $\int_0^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt$, $\int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{e^t}{1+t^{n+1}} dt$ et $\int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt$.

En déduire les variations de la suite $(x_n(y))$ pour $n \geq N$ et la convergence de la suite $(x_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$. On note ℓ sa limite.

c) Démontrer, pour $n \geq N$, l'inégalité $\left| \int_\ell^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n} dt \right| \leq e|x_n(y) - \ell|$

En déduire l'expression de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\ell \frac{e^t}{1+t^n} dt$ en fonction de y puis l'expression de ℓ en fonction de y .

Pour n entier naturel non nul, on définit l'application f_n de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

1. Déterminer l'ensemble A des entiers naturels pour lesquels l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ est convergente. Lorsque n appartient à A , on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$$

2. a) A l'aide d'un encadrement de $\frac{f_n(x)}{f_2(x)}$, montrer que la suite (I_n) est majorée par la suite de terme général $\frac{B}{n!}$ pour une valeur convenable de B .

b) Préciser la nature de la série de terme général I_n .

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $H_n \sim \ln n$.

b) Calculer $\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, puis, encadrer à l'aide de termes de la suite $(H_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la quantité $-\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}$ pour x élément de $[0, 1]$.

c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, $\int_0^1 f_n(x) dx \sim \frac{1}{n! \ln n}$

4. Montrer que pour $n \in A$, $\int_0^1 f_n(x) dx = nI_{n+1}$ et en déduire un équivalent simple de I_n .

Dans cet exercice E désigne l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et I_E désigne l'application identité de E dans lui-même. Si $f \in E$, on note $u(f)$ la primitive de f sur $[0, 1]$ nulle en 0 et $v(f)$ l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1], v(f)(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$$

1. Montrer que u et v définissent deux applications de E dans lui-même.
2. a) Montrer que pour tout $f \in E$, $v \circ u(f) = v(f) - u(f)$, puis que $u \circ v(f) = v(f) - u(f)$.
b) Calculer les composées $(I_E - u) \circ (I_E + v)$ et $(I_E + v) \circ (I_E - u)$.
3. Soit g l'élément de E , affine sur les segments $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$, et tel que $g(0) = g(1) = 0$, $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
Montrer qu'il existe un unique élément f de E tel que, pour tout x appartenant à $[0, 1]$,

$$f(x) - \int_0^x f(t) dt = g(x)$$

et le déterminer.

4. On définit par récurrence u^n , pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u^0 = I_E \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u^{n+1} = u \circ u^n$$

- a) Montrer que si $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$,

$$u^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt.$$

- b) Montrer que si $f \in E$ et $x \in [0, 1]$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u^n(f)(x)$ est convergente

et que : $\sum_{n=1}^{\infty} u^n(f)(x) = v(f)(x)$.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^x & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) Etudier l'existence des dérivées partielles de f .
2. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x, 0) - 1$.
a) Etudier les variations de h .
b) En déduire que f n'admet pas d'extremum en $(0, 0)$.
3. Déterminer les points critiques de f .
4. a) Montrer que $\forall x \geq 0, f(x, y) \geq h(x) + 1$.
b) En déduire que f admet en $(\frac{1}{e}, 0)$ un minimum local.
5. On pose $g(x) = f(x, 1) - f(0, 1)$.
a) Montrer que $g(x)$ est du signe de x .
b) En déduire que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 1)$.

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et on pose, pour tout élément f de E , $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$

On définit la fonction K de $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{t^2}{x} & \text{si } x > t \\ \frac{x^2}{t} & \text{si } x < t \\ x & \text{si } x = t \end{cases}$$

Pour $f \in E$, on pose $T(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^1 K(x, t) f(t) dt$.

1. a) Calculer $T(f)(0)$.
b) Montrer que $\forall f \in E, \forall x \in]0, 1], |T(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \left(\frac{x^2}{3} - x^2 \ln x \right)$.
c) Montrer que T est un endomorphisme de E .
d) T est-il surjectif ?
2. Montrer que $T(f) \in \mathcal{C}^1([0, 1])$.
3. Calculer $T(f)(1) + [T(f)]'(1)$.

On considère la fonction f de deux variables définie par :

$$f(x, y) = xy \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$$

1. Déterminer l'ensemble D de définition de f .
2. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $f(x, y) = 0$ est la réunion de deux segments et d'une courbe C que l'on précisera.
3. Montrer que D est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et que $D \setminus C$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (on pourra admettre cette question).
4. Étudier les extremums de f sur D .

On pourra montrer que f admet un minimum et un maximum et qu'il suffit de s'intéresser aux points de l'ouvert

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x^2 + 2y^2 < 1\}$$

On administre à un patient q unités d'un médicament. Après t minutes la quantité de médicament active dans le sang est $q.e^{-ct}$, où c est une constante strictement positive. La même dose de médicament est injectée régulièrement toutes les T minutes.

1. Déterminer la quantité $A(k)$ de médicament encore active dans le sang immédiatement après la $k^{\text{ème}}$ injection.
2. Calculer la borne supérieure de la quantité de médicament présente dans le sang après un nombre indéterminé d'injections. En déduire l'intervalle de temps le plus court à respecter entre deux doses pour que $A(k)$ ne dépasse pas un niveau $M > q$ donné.
3. On sait qu'au bout de 2 heures la quantité de médicament active dans le sang est de $q/2$. On administre des doses de 50 mg. Sachant que la dose maximale supportée est de 500 mg, à quelle fréquence peut-on administrer le médicament en toute sécurité?

1. Pour quelles valeurs réelles de x , l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt$ est-elle convergente?
2. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt$. On veut écrire $f(x)$ sous la forme $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{k!}{x^k} + R_n(x)$, avec $R_n(x)$ à déterminer, en vue d'obtenir une valeur approchée de $f(x)$.
 - a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_0^{+\infty} t^k \cdot e^{-xt} dt$. Etablir la convergence de cette intégrale et donner sa valeur.
 - b) Montrer que pour tout $t \geq 0$ et tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k t^{k-1} + (-1)^n \frac{nt^{n+1} + (n+1)t^n}{(1+t)^2}$$
 - c) En déduire que $f(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{k!}{x^k} + R_n(x)$, avec un $R_n(x)$ que l'on donnera sous forme d'une intégrale convergente.
 - d) Montrer que pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|R_n(x)| \leq (n+x) \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$
3. En déduire une valeur approchée décimale de $f(100)$ à 10^{-6} près.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, avec $A_n = (a_{i,j}(n))$, on dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $L = (\ell_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, la suite $n \mapsto a_{i,j}(n)$ converge vers $\ell_{i,j}$.
On note alors $L = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, avec $p \geq 2$. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

définie par $U_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1,n} \\ \vdots \\ \alpha_{p,n} \end{pmatrix}$, avec :

$U_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,0} \\ \vdots \\ \alpha_{p,0} \end{pmatrix}$ est donnée et pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout k de $\llbracket 1, p \rrbracket$:

$$\alpha_{k,n+1} = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1, i \neq k}^p \alpha_{i,n}$$

1. a) Pour tout n on pose $s_n = \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n}$. Exprimer s_n en fonction de s_0 .
b) Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, en déduire une relation entre $\alpha_{k,n+1}$ et $\alpha_{k,n}$.
c) Etudier la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. On note J la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les termes valent 1 et on pose $A = J - I_p$, où I_p est la matrice unité d'ordre p .
a) Exprimer U_{n+1} à l'aide de A et U_n .
b) A l'aide des résultats de la question 1., déterminer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

c) En déduire la convergence de la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k$$

ainsi que la limite de cette suite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes de degré au plus $2n$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{2n})$.

Si $P \in E$, P' désigne le polynôme dérivé de P .

On considère Φ définie sur E par :

$$\Phi(P)(X) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)P'(X) + 2nXP(X)$$

1. Vérifier que Φ définit un endomorphisme de E .
2. a) Soit λ entier relatif tel que $-n \leq \lambda \leq n$. Déterminer (α, β) de $\mathbb{N}^2$ pour que le polynôme $P(X) = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$ de E vérifie $\Phi(P) = \lambda P$.
 b) En déduire les valeurs propres et les polynômes propres de Φ . L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
3. Déterminer la matrice A de Φ relativement à la base $\mathcal{B}$.
4. Déterminer une matrice A' dont les valeurs propres sont les nombres $0, 1, \dots, 2n$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.
5. Construire un endomorphisme Λ de E tel que $\Lambda(P)$ s'exprime en fonction de P, P' et P'' et admettant $0, 1, 4, 9, \dots, (2n)^2$ comme valeurs propres.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $GL(E)$ le sous-ensemble form des endomorphismes bijectifs.

Un sous-espace F de E est dit stable par $GL(E)$ si, pour tout $u \in GL(E)$, $u(F) \subset F$.

1. Soit x un vecteur non nul de E . Montrer que pour tout vecteur y non nul, il existe $u \in GL(E)$ tel que $u(x) = y$.
2. Montrer que si F est stable par $GL(E)$, alors $F = \{0\}$ ou $F = E$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cos x - \sin x$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, il existe un unique x_n appartenant $]n\pi, n\pi + \pi/2[$ tel que $f(x_n) = 0$.
2. Donner un équivalent simple u_n de x_n lorsque n tend vers l'infini.
3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n - n\pi]$.