# 1

# ANALYSE

## Exercice 1-1

Pour effectuer certains calculs de probabilités, on a besoin de connaître certaines valeurs de la fonction de répartition $\Phi$ de la loi normale centrée réduite. Le but de cet exercice est de faire calculer $\Phi(x)$ à $10^{-6}$ près à l'aide d'un ordinateur, pour toute valeur $x$ demandée par l'utilisateur.

Pour cela on considère la fonction $x \mapsto f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, pour $x \geq 0$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$ :

$$\frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}} \leq \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}$$

En déduire que :

$$\left| \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}} \right| \leq \frac{x}{n}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

2. Quelle inégalité doit vérifier $n$ pour trouver une valeur approchée de $\Phi(x)$ à $10^{-6}$ près ?

3. On considère le programme suivant :

```
Program Loi_normale ;
Uses crt ;
Const e=0.00001 ;
```

```
Var  s,x : real ; i,n : integer ;
Function f(x : real) : real ;
Begin  ···  End ;

{ fonction f définie ci-dessus. }
Begin ······ ······ ······ End.
```

Compléter ce programme pour qu'il demande à l'utilisateur la valeur de $x$ et affiche $\Phi(x)$ à $10^{-6}$ près.

---

**Solution :**

1. On utilise la méthode classique des rectangles. Si $t \in \left[\frac{kx}{n}, \frac{(k+1)x}{n}\right]$, la fonction $f$ étant décroissante, on a :

$$f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{kx}{n}\right)$$

d'où, en intégrant sur l'intervalle $\left[\frac{kx}{n}, \frac{(k+1)x}{n}\right]$,

$$\frac{x}{n} f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) \leq \int_{kx/n}^{(k+1)x/n} f(t)dt \leq \frac{x}{n} f\left(\frac{kx}{n}\right)$$

Enfin, on somme ces inégalités pour $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Il vient :

$$\frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}} \leq \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}$$

L'inégalité précédente s'écrit $a_n \leq b_n \leq c_n$. Donc $|b_n - c_n| \leq c_n - a_n$, soit :

$$\left| \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}} \right| \leq \frac{x}{n}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

2. On sait que pour tout $x \geq 0, \Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Ainsi $\frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}$ sera une valeur approchée de $\Phi(x)$ à $10^{-6}$ près si $n$ vérifie

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{n}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2}}\right) < 10^{-6}.$$

La résolution de cette inéquation donne :

$$n > \frac{x}{\sqrt{2\pi}} 10^6 (1 - e^{-\frac{x^2}{2}})$$

3. Nous allons suivre l'algorithme précédent pour écrire le programme demandé : calcul de $n$ correspondant à la précision donnée, puis calcul de l'approximation.

```
Program Loi_normale ;
Uses crt ;
Const e=0.000001 ;
Var  s,x,u : real ;
k,n : integer ;
Function f(x :real) :real ;
Begin
f :=exp(-(x*x/2))
End ;
Begin
Write('x=') ; readln(x) ;
n :=1 ;
Repeat
n :=n+1 until (x*(1-f(x))/n)<e ;
For k :=1 to n do s :=s+x*f(x*k/n)/n ;
Writeln(n,'  ', 0.5+s/sqrt(2*pi))
End.
```

## Exercice 1-2

Soit un entier naturel $n \geq 2$ et $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^4$$

Minimiser $f$ sous les contraintes :

$$\{\forall\, i, x_i > 0, \text{ et } x_1 + \ldots + x_n = n\}.$$

**Solution :**

Sous les contraintes $\{\forall\, i, x_i > 0, \text{ et } x_1 + \cdots + x_n = n\}$, on peut écrire $f$ sous la forme :

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^4 + (n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)^4 \\ x_i > 0, \,\forall\, i \in [\![1, n]\!] \end{cases}$$

Cette fonction admet des dérivées partielles et pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 4\left(x_i^3 - (n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i)^3\right)$$

La résolution du système d'équations $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ donne alors :

$$\begin{cases} x_1 & = & n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i \\ x_2 & = & n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & = & n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i \end{cases}$$

dont la seule solution est $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$ (il suffit de sommer toutes les équations), donc $x_n = 1$.

Ce point critique constitue-t-il un minimum pour $f$ ? On sait par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot u_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} u_i^2$$

Posons $u_i = x_i$ puis $u_i = x_i^2$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = n$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 \geq n$$

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \geq n$ et le point critique est un minimum pour $f$.

Notons d'ailleurs que l'étude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne en une seule fois la totalité de la réponse.

## Exercice 1-3

Soit $a$ un nombre réel positif ou nul. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+a)}$ $(n \geq 1)$, où $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k$ désigne le produit $x_1 x_2 \ldots x_n$.

1. On suppose que $a \in [0,1]$. Montrer que la série de terme général $u_n$ est divergente.

2. On suppose que $a > 1$ et on note $S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$, pour $n \geq 2$.

a) Etablir la relation : $\forall\, n \geq 2, S_{n-1} = \dfrac{1}{a-1} - \dfrac{n+a}{a-1}\, u_n$.

b) Montrer que la série de terme général $u_n$ est convergente.

c) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

---

**Solution :**

1. Si $a \in [0,1]$, pour tout $k \in \mathbb{N},\ 0 < k+a \leq k+1$ et $0 < \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+a) \leq (n+1)!$.

Ceci entraîne que :

$$u_n \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

donc que la série $\sum u_n$ est divergente.

2. a) Montrons la relation : $\forall\, n \geq 2, S_{n-1} = \dfrac{1}{a-1} - \dfrac{n+a}{a-1}\, u_n$, par récurrence sur $n$.

- pour $n = 2$, on a :

$$\frac{1}{a-1} - \frac{2+a}{a-1}u_2 = \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{2}{a+1}\right) = \frac{1}{a+1}, \text{ et } S_1 = u_1 = \frac{1}{a+1}$$

- supposons la relation vérifiée pour tout $k \leq n-1$. Alors :

$$\begin{aligned} S_n = S_{n-1} + u_n &= \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1}u_n + u_n \\ &= \frac{1}{a-1}\left(1 - (n+a)u_n + (a-1)u_n\right) = \frac{1}{a-1}\left(1 - (n+1)u_n\right) \\ &= \frac{1}{a-1}\left(1 - (n+1)\frac{(n+a+1)u_{n+1}}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a}{a-1}u_{n+1} \end{aligned}$$

b) La série $\sum u_n$ est une série à termes positifs telle que la suite des sommes partielles $(S_n)$ reste majorée par $\dfrac{1}{a-1}$. Cette série est donc convergente et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \ell \leq \frac{1}{a-1}$$

c) Supposons que $\ell < \dfrac{1}{a-1}$. Dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+a}{a-1}u_n = \frac{1}{a-1} - \ell = \alpha > 0$$

et $\dfrac{n+a}{a-1}u_n \sim \alpha$ ou $u_n \sim \dfrac{(a-1)\alpha}{n}$, ce qui entraînerait la divergence de la série $\sum u_n$. Ainsi $\ell = \dfrac{1}{a-1}$.

**Exercice 1-4**

Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t}\,dt$, et pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt$.

1. Etudier la parité de $f$.

2. Montrer que $g$ est définie pour tout $x > 0$, dérivable et donner la valeur de $g'(x)$.

3. Donner une relation simple entre $f$ et $g$. En déduire que $f$ est définie pour tout $x \neq 0$, dérivable et calculer $f'(x)$.

4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $f(x)$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

5. Calculer la limite quand $x$ tend vers 0, $x \neq 0$ de $h(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t}\,dt$. En déduire que $f$ admet une limite quand $x$ tend vers 0.

**Solution :**

1. La fonction $f$ est bien définie pour tout $x \neq 0$, puisqu'alors $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ est continue sur l'intervalle $[x, 3x]$.
On a :

$$f(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t}dt = \int_x^{3x} \frac{\cos(-t)}{-t}d(-t) = f(x)$$

La fonction $f$ est donc paire.

2. La fonction $g$ est une primitive de la fonction continue $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
La fonction $g$ y est donc dérivable, et pour tout $x > 0$ : $g'(x) = \dfrac{\cos x}{x}$.

3. On peut écrire :

$$f(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=\int_x^{1}\frac{\cos t}{t}dt+\int_1^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=g(3x)-g(x)$$

Ainsi $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x>0$,

$$f'(x)=3g'(3x)-g'(x)=\frac{\cos 3x-\cos x}{x}.$$

Par parité, $f$ est dérivable pour tout $x\neq 0$.

4. En intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned}f(x)&=\left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt\\&=\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt\end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}\right|\leq\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{4}{3x}\right|=0$$

et :

$$\left|\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt\right|\leq\int_x^{3x}\frac{1}{t^2}dt=\frac{2}{3x}$$

tend également vers 0 lorsque $x$ tend vers l'infini. Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

5. Lorsque $x$ est au voisinage de $0$ ; on a $|\cos t-1|\leq\frac{t^2}{2}$. Par suite :

$$|h(x)|\leq\int_x^{3x}\frac{|\cos t-1|}{t}dt\leq\int_x^{3x}\frac{t}{2}dt=2x^2$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=0$.

On peut écrire $f(x)=h(x)+\displaystyle\int_x^{3x}\frac{dt}{t}=h(x)+\ln 3$. Donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\ln 3$. Ceci permet de prolonger $f$ en $0$ en posant $f(0)=\ln 3$.

## Exercice 1-5

Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose : $J_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin^{2n}x\,dx$.

1. a) Montrer que $J_n$ existe.
   b) Calculer $J_0$.

2. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence entre $J_n$ et $J_{n-1}$, et en déduire une expression de $J_n$ en fonction de $n$.

b) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. En déduire que cette suite est convergente.

3. a) Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\Big(\dfrac{2k(2k-1)}{4k^2+1}\Big)$.

b) En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On se propose de retrouver le résultat précédent :

a) Montrer que l'on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 0 < J_n \leq \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} \int_0^\pi \sin^{2n} x\, dx$$

b) Retrouver ainsi la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

**Solution :**

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}, |e^{-x} \sin^{2n} x| \leq e^{-x}$, ce qui entraîne que $J_n$ existe.

b) Trivialement $J_0 = 1$.

2. Soit $A > 0$. Une intégration par parties donne :

$$\int_0^A e^{-t} \sin^{2n} t dt = \big[-e^{-t} \sin^{2n} t\big]_0^A + 2n \int_0^A e^{-t} \sin^{2n} t \cos t dt$$

d'où, lorsque $A$ tend vers l'infini :

$$J_n = 2n \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^{2n} t \cos t dt$$

On intègre de nouveau par parties :

$$\frac{J_n}{2n} = \big[-e^{-t} \sin^{2n-1} t \cos t\big]_0^A + \int_0^A e^{-t}((2n-1)\sin^{2n-2} t \cos^2 t - \sin^{2n} t)dt$$

puis, quand $A$ tend vers l'infini :

$$J_n = 2n((2n-1)J_{n-1} - (2n-1)J_n - J_n) \Rightarrow J_n = \frac{2n(2n-1)}{1+4n^2} J_{n-1}$$

b) Il est évident que $J_n \geq 0$ pour tout $n$. La relation précédente montre que la suite $(J_n)$ est décroissante. elle est donc convergente (décroissante et minorée).

3. a) On a :

$$\ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1+2k}{1+4k^2}\right) \sim -\frac{1+2k}{1+4k^2} \sim -\frac{1}{2k}$$

La série $\sum \ln\left(\dfrac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)$ est donc divergente et de limite $-\infty$.

b) On sait que $\ln\left(\dfrac{J_k}{J_{k-1}}\right) = \ln\left(\dfrac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)$. Donc, pour tout $n \geq 1$ :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{J_k}{J_{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)$$

ou

$$\ln J_n - \ln J_0 = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{4k^2-2k}{4k^2+1}\right)$$

cela entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln J_n = -\infty$ donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

4. a) Soit $k \geq 0$. Alors :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t}\sin^{2n} t dt = \int_0^{\pi} e^{-u-k\pi}\sin^{2n} u du$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^{(N+1)\pi} e^{-t}\sin^{2n} t dt &= \sum_{k=0}^{N} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t}\sin^{2n} t dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{N} e^{-u-k\pi}\right)\sin^{2n} u du \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1-e^{-(N+1)u}}{1-e^{-u}} e^{-u}\sin^{2n} u du \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\sin^{2n} u du \\
&\leq \frac{1}{1-e^{-\pi}} \int_0^{\pi} \sin^{2n} u du
\end{aligned}$$

Ceci restant vérifié pour tout $N$, l'inégalité demandée en découle.

b) Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt = 0$. On peut écrire :

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2n} t dt$$

Le changement de variable $u = \pi - t$ dans la seconde intégrale montre que $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n} t dt = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors :
$$\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \sin^{2n} t dt \leq \varepsilon$$
et, par croissance de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$ :
$$\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^{2n} t dt \leq \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right)^{2n} \times \frac{\pi}{2}$$
Comme $0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < 1$, il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right)^{2n} < \varepsilon$. Ceci entraîne que lorsque $n$ tend vers l'infini, $J_n$ tend vers 0.

**Exercice 1-6**

Pour $x$ et $t$ réels, on pose
$$f(x,t) = \frac{\ln(1+xt)}{t.(1+t)}$$

1. Déterminer le domaine de définition $D$ de $f$.

2. Soit $x \neq 1$ fixé. Déterminer deux réels $a_x$ et $b_x$, fonction de $x$ uniquement tels que, pour tout $t$ vérifiant $(x,t) \in D$, on ait :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{a_x}{1 + x\,t} + \frac{b_x}{1+t}$$
On pose
$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t.(1+t)} dt$$

3. Préciser le domaine de définition $\Delta$ de $F$.

4. En admettant que, pour $x > -1$,
$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$$
calculer explicitement $F'(x)$ et en déduire le sens de variation de $F$ sur $\Delta$.

5. Montrer que $F'$ est continue en 1.

6. Déterminer la limite de $F$ en $+\infty$ (on pourra faire un changement de variable).

**Solution :**

1. $f(x,t) = \dfrac{\ln(1+xt)}{t\cdot(1+t)}$ est définie si et seulement si $\begin{cases} t \neq 0 \\ t \neq -1 \\ 1+xt > 0 \end{cases}$ Ce qui donne :

- $x = 0, t \neq 0, 1$
- $x > 0, 1+xt > 0 \Leftrightarrow t > -1/x$
- $x < 0, 1+xt > 0 \Leftrightarrow t < -1/x$

2. Un calcul élémentaire donne :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(1+t)(1+xt)} = \frac{a_x}{1+t} + \frac{b_x}{1+xt}$$

En réduisant cette dernière expression au mme dénominateur et par identification avec l'expression précédente, il vient :

$$b_x = -\frac{x}{1-x}, \qquad a_x = \frac{1}{1-x}$$

Donc, pour tout $x \neq 1$ :

$$\frac{1}{(1+t)(1+xt)} = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{x}{1+xt}\right)$$

3. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,1[$ si et seulement si $x \geq -1$.

- au voisinage de $0^+$, $f(x,t) \sim x$. Ainsi $t \mapsto f(x,t)$ admet un prolongement par continuité en $t = 0$.
- au voisinage de $1^-$, si $x > -1$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue en 1.

Si $x = -1$, $f(-1,t) = \dfrac{\ln(1-t)}{t(1+t)} \sim \dfrac{\ln(1-t)}{2}$. Et l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \ln(1-t)dt$ converge comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln u du$.

Finalement $F$ est définie sur $\Delta = [-1, +\infty]$.

4. Si $x > -1, x \neq 1$ :

$$F'(x) = \frac{1}{1-x}\left[\int_0^1 \frac{dt}{1+t} - x\int_0^1 \frac{dt}{1+xt}\right] = \frac{1}{1-x}\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)$$

et $F'(x) > 0$ pour tout $x > -1, x \neq 1$. Ainsi la fonction $F$ est croissante sur $\Delta$.

5. On a :

$$F'(1) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{2}$$

et en posant $x = 1+h$, pour $h$ au voisinage de 0 :

$$F'(x) = -\frac{1}{1-x}\ln\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{2}) \sim \frac{1}{2}$$

ce qui montre que $F'$ est continue en $x = 1$.

6. Pour $x > 0$, posons $u = xt$. Il vient :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u} \frac{x}{x+u} du \geq \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u} du$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u)}{u} du$ diverge, car $\dfrac{\ln(1+u)}{u} \geq \dfrac{1}{u}$ dès que $u \geq e$.

Donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

## Exercice 1-7

1. Résoudre l'inéquation : $x^2 - 2x + \sqrt{x} > 0$ , ainsi que le système :

$$\begin{cases} a &= 1 - \sqrt{b} \\ b &= 1 - \sqrt{a} \end{cases}$$

2. Étudier la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \sqrt{|u_n|}$ dans le cas où $u_0 \in [0, 1]$.

---

**Solution :**

1. On remarque que 0 n'est pas solution de cette inéquation, et on pose $X = \sqrt{x}$. L'inéquation devient $X^4 - 2X^2 + X > 0$. Comme $X > 0$, elle est équivalente à $X^3 - 2X + 1 > 0$. Or :

$$X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X + \frac{\sqrt{5}+1}{2})(X - \frac{\sqrt{5}-1}{2})$$

Donc :

$$x^2 - 2x + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{5}+1}{2})(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{5}-1}{2})$$

L'ensemble des solutions est alors :

$$x \in \left]0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[ \cup ]1, +\infty[$$

Le système $\begin{cases} a &= 1 - \sqrt{b} \\ b &= 1 - \sqrt{a} \end{cases}$ admet comme solutions évidentes les couples $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Autrement il est équivalent au système $\begin{cases} a > 0, b > 0 \\ a^2 - 2a + \sqrt{a} = 0 \\ b = 1 - \sqrt{a} \end{cases}$ , qui admet, par la question précédente, comme unique solution le couple $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. On montre facilement par récurrence que pour tout $n \geq 0, u_n \in [0,1]$. La suite $(u_n)$ est donc bornée. Si elle converge, elle converge vers le point fixe de l'application continue $x \mapsto 1 - \sqrt{x}$ qui n'est autre que $\ell = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \in ]0,1[$.

On remarque enfin que les sous-suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont monotones et bornées et qu'elles convergent vers les points $a$ et $b$ solutions du système d'équations de la question précédente.

- si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$. La suite $(u_n)$ prend alternativement les valeurs 0 et 1 et ne converge pas.
- si $u_0 = \ell$, la suite $(u_n)$ est constante égale à $\ell$.
- si $0 < u_0 < \ell$, on considère les sous-suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$. On montre par récurrence que $(u_{2n})$ est croissante et majorée par $\ell$, alors que $(u_{2n+1})$ est décroissante minorée par $\ell$. Ces deux sous-suites convergent donc vers $\ell$.
- si $\ell < u_0 < 1$, on considère les sous-suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$. On montre par récurrence que $(u_{2n})$ est décroissante et minorée par $\ell$, alors que $(u_{2n+1})$ est croissante majorée par $\ell$. Ces deux sous-suites convergent donc vers $\ell$.

## Exercice 1-8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ une fonction continue vérifiant, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

1. a) Calculer $f(0)$.

b) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt \neq 0$.

2. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donner une relation simple entre $f$ et sa dérivée $f'$, puis exprimer $f$ en fonction du nombre $f'(0)$.

(on rappelle que les solutions de l'équation différentielle $z' = \mu z$, où $\mu \in \mathbb{R}$, sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{\mu x}$, où $C$ est une constante réelle).

3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et $X$ une variable aléatoire définie sur $\Omega$, à densité, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{+2}$ :

$$P\left[X > x+y) \;/\; X > x\right] = P(X > y)$$

Déterminer la loi de $X$.

**Solution :**

1. a) En posant $x = y = 0$ dans l'équation $f(x+y) = f(x)f(y)$, on obtient $f(0) = f^2(0)$, d'où $f(0) \in \{0,1\}$. Si $f(0) = 0$, alors pour tout $x$ réel, $f(x) = 0$ (on prend $y = 0$), et $f$ est la fonction identiquement nulle. Aussi $f(0) = 1$.

b) Supposons que pour tout $x$ réel, $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = 0$. Alors, en dérivant, pour tout $x$ réel $f(x) = 0$. On peut donc affirmer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^a f(t)dt \neq 0$.

2. Reprenons l'équation $f(x+y) = f(x)f(y)$.

$$\begin{aligned} f(x+y) = f(x)f(y) &\Rightarrow \int_0^a f(x+y)dy = f(x)\int_0^a f(y)dy \\ &\Leftrightarrow \int_x^{x+a} f(t)dt = \lambda f(x), \quad (\lambda = \int_0^a f(t)dt \neq 0) \end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\int_x^{x+a} f(t)dt$$

est une fonction de classe $C^1$ puisque $f$ est continue.

Par dérivation, l'équation $f(x+y) = f(x)f(y)$ donne $f'(x+y) = f'(x)f(y)$ et pour $x = 0$, pour tout $y$ réel, $f'(y) = f'(0)f(y)$. Ainsi $f$ vérifie l'équation différentielle $z' = \mu z$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{\mu x}$. Ici, pour tout $x$ réel :

$$f(x) = e^{f'(0)x}, \quad (f(0) = 1)$$

3. On sait que :

$$\begin{aligned} P(X > x+y | X > x) &= \frac{P((X > x+y) \cap (X > x))}{P(X > x)} = \frac{P(X > x+y)}{P(X > x)} \\ &= P(X > y) \end{aligned}$$

Donc :

$$P(X > x+y) = P(X > x)P(X > y)$$

Posons $G(x) = P(X > x)$. La fonction $G$ est continue et vérifie, pour tout $x > 0, y > 0, G(x+y) = G(x)G(y)$ et $G(0) = 1$. On sait alors qu'il existe un réel $\mu$ tel que pour tout $x > 0, G(x) = e^{\mu x}$, et $F(x) = P(X < x) = 1 - G(x) = 1 - e^{\mu x}$. Comme $F$ est une fonction de répartition (pour tout $x, 0 \leq F(x) \leq 1$), $\mu < 0$ et $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $-\mu$.

## Exercice 1-9

Soit $n$ un entier naturel non nul et $(E_n)$ l'équation :

$$(E_n) \qquad 1 + \ln(x+n) = x$$

1. Montrer que $(E_n)$ admet une unique solution $a_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

2. Pour $n$ assez grand, comparer les trois nombres $n, \ln(n)$ et $a_n$. En déduire la nature de la suite $(a_n)$.

3. a) Déterminer une constante $C$ telle que les suites $(a_n)$ et $(C\ln(n))$ soient équivalentes.

b) Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{e}^{a_n}$.

4. a) Montrer que la suite $(a_n - C\ln(n))$ est convergente et déterminer sa limite $\ell$.

b) Quelle est la nature de la série $\sum(a_n - C\ln(n) - \ell)$ ?

**Solution :**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x - \ln(n+x) - 1$.

La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, avec $f'(x) = \dfrac{n+x-1}{n+x}$. Par conséquent $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $f(0) = -\ln n - 1 < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, la fonction continue $f$ s'annule une fois (théorème des valeurs intermédiaires) et une seule (stricte monotonie).

2. $\star$ $f(n) = n - \ln(2n) - 1$, donc pour $n$ assez grand $f(n) > 0$ et $a_n < n$.

$\star$ $f(\ln n) = \ln n - \ln(n + \ln n) - 1 = \ln\left(\dfrac{n}{n+\ln n}\right) - 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$. Ainsi, pour $n$ assez grand, on a $f(\ln n) < 0$ et $a_n > \ln n$.

$\star$ Pour $n$ assez grand, on a $a_n > \ln n$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

3. a) On a $1 + \ln(a_n + n) = a_n$, donc $a_n = 1 + \ln n + \ln(1 + \frac{a_n}{n})$. Or, pour $n$ assez grand, $0 < \frac{a_n}{n} < 1$, donc le terme prépondérant est $\ln n$ et $a_n \underset{(\infty)}{\sim} \ln n$. On a donc $C = 1$.

b) On a : $\mathrm{e}^{a_n} = \mathrm{e}.\mathrm{e}^{\ln(n+a_n)} = \mathrm{e}(n+a_n)$, et comme $a_n$ est négligeable devant $n$ (il est équivalent à $\ln n$), il vient : $\mathrm{e}^{a_n} \underset{(\infty)}{\sim} n\mathrm{e}$.

4. a) On a : $a_n - \ln n = 1 + \ln(1 + \frac{a_n}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

b) Enfin, $a_n - \ln n - 1 = \ln(1 + \frac{a_n}{n}) \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{a_n}{n} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Par conséquent, pour $n$ assez grand $a_n - \ln n - 1 > \dfrac{1}{n}$ et la divergence de la série harmonique donne par minoration la divergence de la série proposée.

**Exercice 1-10**

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possédant la propriété suivante :

$$(\exists\ K_f \geq 0)\ (\forall\ x \in \mathbb{R})\ (\forall\ y \in \mathbb{R}) \quad |f(y) - f(x)| \leq K_f\,|y - x| \qquad (1)$$

1. Vérifier que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Donner un exemple de fonction (non nulle) de $\mathcal{L}$ et de fonction de $\mathcal{C}$ n'appartenant pas à $\mathcal{L}$.

Soit $g$ une fonction de $\mathcal{L}$, $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \,]-1, 1[$ fixés.

2. Montrer que, pour tout $x$ réel, la série de terme général $\lambda^n\, g(x + n\,a)$ converge.
(on pourra chercher à majorer $g(x + n\,a)$ à l'aide de la propriété (1)).

On définit ainsi une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n\, g(x + n\,a)$$

3. Montrer que $F \in \mathcal{L}$.

4. Montrer que $F$ est l'unique fonction $f \in \mathcal{L}$ vérifiant :

$$(\forall\ x \in \mathbb{R}) \qquad f(x) - \lambda\, f(x + a) = g(x)$$

**Solution :**

1. L'ensemble $\mathcal{L}$ est non vide, puisqu'il contient la fonction nulle. Pour chaque $x$ fixé, la condition (1) donne la continuité de $f$ en $x$, donc $\mathcal{L}$ est inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}$.

Enfin, si $f$ et $g$ appartiennent à $\mathcal{L}$, de constantes associées $K_f$ et $K_g$, l'inégalité triangulaire montre que $f + \lambda g$ appartient à $\mathcal{L}$, une constante associée étant $K_f + |\lambda| K_g$.

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à dérivée bornée est dans $\mathcal{L}$ (par exemple $x \mapsto x$) et toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à dérivée non bornée n'appartient pas à $\mathcal{L}$ (par exemple $x \mapsto \mathrm{e}^x$).

2. D'après (1), $|g(x + na) - g(x)| \leq K_g |na|$ et, en particulier :

$$|g(x + na)| \leq |g(x)| + K_g n |a| \text{ et } |\lambda^n g(x + na)| \leq |\lambda|^n |g(x)| + n|\lambda|^n K_g |a|.$$

La série de terme général $|\lambda|^n$ est convergente, ainsi que la série de terme général $n|\lambda|^n$. Par majoration, la série proposée est absolument convergente.

3. Pour tout couple $(x, y)$ :

$$|F(y) - F(x)| = |\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n g(y + na) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n g(x + na)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n K_g |y - x|$$
$$= \frac{K_g}{1 - |\lambda|} |y - x|$$

(écrire d'abord des sommes finies et prolonger les inégalités à la limite)

Donc $F$ vérifie la condition (1).

4. $\star$ On a :

$$F(x) - \lambda F(x + a) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n g(x + na) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n g(x + (n + 1)a)$$
$$F(x) - \lambda F(x + a) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n g(x + na) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} g(x + (n + 1)a) = g(x)$$

$\star$ Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}$ vérifiant la condition de la question 4). On a :

$$\begin{cases} f(x) - \lambda f(x + a) = g(x) \\ f(x + a) - \lambda f(x + 2a) = g(x + a) \\ \qquad\vdots \\ f(x + (n - 1)a) - \lambda f(x + na) = g(x + (n - 1)a) \end{cases}$$

D'où : $f(x) = \lambda^n f(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k g(x + ka)$

Or $|\lambda^n f(x + na)| \leq |\lambda|^n \big(|f(x)| + K_f.n|a|\big) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et, d'après la question précédente, $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k g(x + ka)$ converge vers $F$.

Soit $f(x) = F(x)$ et $F$ est l'unique solution appartenant à $\mathcal{L}$.

## Exercice 1-11

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^4)^n}$

2. Justifier que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge (on ne cherchera pas à calculer sa limite).

3. Montrer que :

$$(\forall\ n \in \mathbb{N}^*) \qquad I_n - I_{n+1} = \frac{1}{4n} I_n$$

4. En déduire une expression de $I_n$ en fonction de $I_1$.

5. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{4n-1}{4n}\right)$.

En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

6. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\, I_k$ et en déduire la nature et la somme, en fonction de $I_1$, de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\, I_k$.

---

**Solution :**

1. La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}_+$ et équivalente au voisinage de l'infini à $\dfrac{1}{t^{4n}}$ : la règle de Riemann montre que l'intégrale converge si et seulement si $4n > 1$, donc converge pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$.

2. $\forall\, t \in \mathbb{R}_+, (1+t^4)^{n+1} \geq (1+t^4)^n$, donc $I_{n+1} \leq I_n$ et la suite $(I_n)$ est positive décroissante, donc convergente.

3. $I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t \times \frac{t^3}{(1+t^4)^{n+1}}\, dt$.

On effectue alors une intégration par parties, en intégrant $t \mapsto \dfrac{t^3}{(1+t^4)^{n+1}}$ en $t \mapsto -\dfrac{1}{4n(1+t^4)^n}$, d'abord sur un segment $[0, X]$, puis en faisant tendre $X$ vers $+\infty$, ce qui donne :

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{4n}\, I_n$$

4. Ainsi $I_{n+1} = \dfrac{4n-1}{4n}\, I_n$ et, par récurrence :

$$\forall\, n \geq 1, I_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{4k-1}{4k}\right) I_1$$

5. $\ln\left(\dfrac{4n-1}{4n}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{4n}\right) \sim -\dfrac{1}{4n}$, qui est le terme général d'une série divergente. La série proposée étant à termes négatifs, elle est donc divergente vers $-\infty$.

Soit : $\ln I_n = \ln I_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{4k-1}{4k}\right) \longrightarrow -\infty$ et donc $\lim I_n = 0$.

6. $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big[ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{(1+t^4)^k} \Big]\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \left(-\frac{1}{1+t^4}\right)^n}{2+t^4}\, dt$
(identité géométrique, la raison étant différente de 1)

Soit : $$S_n = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^4}}_{J} + (-1)^{n+1} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n(2+t^4)}}_{R_n}$$

Comme $0 \leq R_n \leq I_n$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ et :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} I_k = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^4} = \ell$$

Le changement de variable $t = 2^{1/4}u$ donne : $\ell = 2^{-3/4} I_1$.

## Exercice 1-12

On considère la fonction $\Phi$ définie sur $]1,+\infty[$ par $\Phi(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{dt}{\ln t}$.

(La borne inférieure de l'intervalle d'intégration est le nombre « e » base des logarithmes népériens).

1. Etudier les variations de la fonction $\Phi$ sur $]1,+\infty[$.
Préciser le signe de $\Phi$ sur $]1,+\infty[$ et sa convexité éventuelle.
La fonction $\Phi$ admet-elle une limite en 1 ? en $+\infty$ ?

2. Montrer que pour tout $x > \mathrm{e}^2$, $\Phi(x) < \sqrt{x} + \dfrac{2x}{\ln x}$
(On pourra décomposer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \frac{dt}{\ln t}$ à l'aide de la relation de Chasles en introduisant le point $\sqrt{x}$).
En déduire la nature de la branche infinie de la courbe représentative de $\Phi$, puis une allure de cette courbe.

---

**Solution :**

1. La fonction à intégrer est continue et positive sur l'intervalle $]1,+\infty[$, donc pour $x > 1$, $\Phi(x)$ a bien un sens. De plus $\Phi$ est dérivable avec $\Phi'(x) = \dfrac{1}{\ln x} > 0$. La fonction $\Phi$ est croissante sur $]1,+\infty[$.
Si $x > \mathrm{e}$, les bornes sont dans le sens croissant et la fonction à intégrer est positive, donc $\Phi(x) > 0$.
Si $1 < x < \mathrm{e}$, les bornes sont dans le sens décroissant et la fonction à intégrer est encore positive, donc $\Phi(x) < 0$.

$\Phi$ est deux fois dérivable et $\Phi''(x) = -\dfrac{1}{x(\ln x)^2} < 0$, la fonction $\Phi$ est donc concave.
Au voisinage de 1, on a $\dfrac{1}{\ln t} \sim \dfrac{1}{t-1}$. La règle de Riemann donne alors la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{1} \frac{dt}{\ln t}$ et $\Phi$ n'a pas de limite en 1. Comme elle est croissante, cela signifie que $\lim\limits_{1^+} \Phi = -\infty$.

Enfin, on a toujours $\ln t < t$, donc pour $t > 1$, $\dfrac{1}{\ln t} > \dfrac{1}{t}$, d'où, pour $x > \mathrm{e}$, $\Phi(x) > \ln x - 1$ et $\lim\limits_{+\infty} \Phi = +\infty$.

2. Pour $x > \mathrm{e}^2$, on écrit $\Phi(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\ln t} + \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{\ln t}$.

$\star$ La première intégrale est évidemment majorée par $\sqrt{x} - \mathrm{e}$, donc par $\sqrt{x}$.
$\star$ Pour la seconde intégrale, la fonction à intégrer est majorée par $\dfrac{1}{\ln(\sqrt{x})}$, *i.e.* par $\dfrac{2}{\ln x}$ et donc l'intégrale est majorée par $(x - \sqrt{x})\dfrac{2}{\ln x}$ et *a fortiori* par $\dfrac{2x}{\ln x}$.
On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Phi(x)}{x} = 0$ et la courbe représentative admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses. L'allure s'en déduit.

## Exercice 1-13

On définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_1 = 1$, et pour tout $n \geq 1$ :

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_1^2 + u_2^2 + \cdot + u_n^2}{n}$$

1. Etudier la monotonie de cette suite et donner sa limite.

2. Construire une fonction Pascal nommée `u`, utilisant la récursivité, et permettant de calculer $u_n$ (c'est-à-dire telle que $u(n) = u_n$).

3. On considère le programme informatique suivant :

```
Begin i :=0 ; p :=1 ;
repeat
   i :=i+1 ;
   p :=p*2
until u(i)>=p ; writeln(i)
End.
```

On suppose que les variables `i, p` et la fonction `u` ont été déclarées précédemment.

Ce programme affiche 7 lorsqu'on l'exécute.

Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n}{2^n}$.

4. On considère le programme informatique suivant :

```
Var  s,a,n : integer ;
Begin n :=0 ; S :=1 ; a :=1 ;
repeat
   n :=n+1 ;
   s :=s+a*a ;
   a :=s div n
until (s mod n)<>0 ; writeln (n)
End.
```

On suppose que le type `Integer` est défini de façon à ce que ce programme puisse « tourner » . Il affiche 43 lors de son exécution. Que peut-on en déduire ?

---

**Solution :**

1. On a $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3$ et $u_4 = 5$. Il semble donc que l'on ait $u_n \geq n$. Si cette propriété est vraie jusqu'à un rang $n$, alors :

$u_{n+1} \geq \dfrac{1}{n}(1 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \dfrac{1}{n}(1 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}) = v_n$

et : $v_n \geq n+1 \Longleftrightarrow 2n^3 - 3n^2 - 5n + 6 \geq 0 \Longleftrightarrow (n-1)(n-2)(2n+3) \geq 0$

Ainsi, on a bien $u_{n+1} \geq n+1$, et on conclut par le principe de récurrence (fort, comme on dit parfois).

On remarque que l'on a $n.u_{n+1} = (n-1)u_n + u_n^2$, on peut donc écrire :

$$u_{n+1} = \frac{(n-1)u_n + u_n^2}{n}$$

et $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(u_n - 1)}{n} \geq 0$.

Par conséquent la suite $(u_n)$ est croissante et diverge vers $+\infty$.

(pour montrer la croissance, on pouvait se contenter de vérifier que $u_n \geq 1$, ce qui est évident sur la relation de récurrence).

2. On utilise la forme donnée en 1), plus commode pour le calcul :

```
Function u(n :integer) :real ;
Var S :integer ;
```

```
Begin if n=1 then u :=1 else u :=((n-1)*u[n-1]+sqr(u[n-1])/(n-1) ;
end ;
```

3. Ce programme dit que 7 est la première valeur de $n$, pour laquelle $u_n \geq 2^n$.
Or, si cette propriété est vraie pour un certain rang $n$, alors :

$$u_{n+1} \geq \frac{(n-1)2^n + 2^{2n}}{n} = 2^n(1 + \frac{2^n - 1}{n})$$

et ce minorant est au moins égal à $2^{n+1}$ puisque $2^n - 1 \geq n$, pour $n \in \mathbb{N}$ (vérification facile).

Ainsi la propriété est héréditaire et donc :

$$\forall\, n \geq 7, u_n \geq 2^n$$

4. Le résultat signifie que le premier terme de la suite qui n'est pas un nombre entier est $u_{43}$ (mais le programme nécessite de pouvoir considérer de très grands entiers).

**Exercice 1-14**

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et on pose pour $x \in \mathbb{R}$ :

$$F(x) = \int_{\sqrt{|x|}}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

1. Préciser le domaine de définition de $F$.

2. Soit $G$ une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Exprimer $F$ en fonction de $G$. En déduire que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner l'expression de $F'$.

3. Etudier le comportement de $F$ au voisinage de 0 : $F$ est-elle dérivable en 0 ? Dérivable à droite ? A gauche ?

4. Donner les limites de $F$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Donner le signe de $F(x)$ en fonction des valeurs de $x$.

**Solution :**

1. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$ et $F$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. On a $F(x) = G(x) - G(\sqrt{|x|})$, d'où :

$\star$ Sur $\mathbb{R}_+^*$, $F(x) = G(x) - G(\sqrt{x})$, donc $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\forall\, x > 0, F'(x) = G'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} G'(\sqrt{x}) = \mathrm{e}^{-x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \mathrm{e}^{-x}$$

$\star$ Sur $\mathbb{R}_-^*$, $F(x) = G(x) - G(\sqrt{-x})$, donc $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$, avec :

$$\forall\, x < 0, F'(x) = G'(x) - \frac{1}{2\sqrt{-x}} G'(\sqrt{-x}) = \mathrm{e}^{-x^2} + \frac{1}{2\sqrt{-x}}\,\mathrm{e}^{x}$$

3. Clairement $\lim\limits_{x \to 0^-} F'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} F'(x) = -\infty$.

Comme $F$ est continue en 0, on en déduit que $F$ n'est pas dérivable en 0, ni dérivable à gauche ou à droite (conséquence du théorème des accroissements finis), la représentation graphique admettant des demi-tangentes verticales (point de rebroussement de première espèce).

4. Pour $x > 0$, on écrit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt - \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$, d'où :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0$$

Pour $x < 0$, on écrit $F(x) = -\displaystyle\int_x^0 \mathrm{e}^{-t^2}\,dt - \int_0^{\sqrt{-x}} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$, et :

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\sqrt{\pi}$$

Enfin, si $x > 1$ les bornes sont dans le sens croissant et comme la fonction à intégrer est strictement positive et continue, on a $F(x) > 0$. D'autre part $F(0) = F(1) = 0$ et dans les autres cas les bornes sont dans le sens décroissant, d'où $F(x) < 0$.

## Exercice 1-15

Soient $(a_n), (b_n), (c_n)$ les trois suites, définies pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$-1 \leq a_0 \leq b_0 \leq c_0 \leq 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \min(x, b_n, c_n)\,dx \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{med}(x, a_n, c_n)\,dx \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \max(x, b_n, a_n)\,dx \end{array} \right.$$

où $\operatorname{med}(x, y, z)$ désigne celui des trois réels qui est compris entre les deux autres.

1. Montrer que, pour tout $n$, $-1 \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq 1$.

2. Déterminer $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de $a_n, b_n, c_n$.

3. Montrer que $b_{n+1} = \dfrac{1}{8}\, b_{n-1}(3 - b_{n-1}^2)$. En déduire que $|b_{n+1}| \leq \dfrac{3}{8}|b_{n-1}|$.

4. En déduire la convergence des trois suites et préciser les valeurs des limites respectives.

**Solution :**

1. Par hypothèse la propriété est verifiée au rang 0. On suppose donc qu'elle est vraie pour un certain rang $n$ et on a alors, pour tout $x$ de $[0,1]$ :

$$-1 \leq \min(x, b_n, c_n) \leq \operatorname{med}(x, a_n, c_n) \leq \max(x, a_n, b_n) \leq 1$$

(il suffit de distinguer selon la position de $x$ par rapport à $a_n, b_n$ et $c_n$).

En intégrant ces inégalités sur le segment $[0,1]$, on obtient les inégalités voulues au rang $n+1$ et on conclut par le principe de récurrence.

2. En suivant les valeurs de min, med et max, on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{b_n} x\,dx + \frac{1}{2}\int_{b_n}^{1} b_n\,dx = -\frac{1}{4}(b_n - 1)^2$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{a_n} a_n\,dx + \frac{1}{2}\int_{a_n}^{c_n} x\,dx + \frac{1}{2}\int_{c_n}^{1} c_n\,dx = \frac{1}{4}(a_n + c_n)(2 + a_n - c_n)$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{b_n} b_n\,dx + \frac{1}{2}\int_{b_n}^{1} x\,dx = \frac{1}{4}(b_n + 1)^2$$

3. On remarque que $a_{n+1} + c_{n+1} = b_n$ et $a_{n+1} - c_{n+1} = -\dfrac{1}{2}(b_n^2 + 1)$. On en déduit, en décalant l'indice et en remplaçant dans la relation centrale :

$$b_{n+1} = \frac{1}{8}\, b_{n-1}(3 - b_{n-1}^2)$$

Or $b_n \in [-1,1]$, donc $0 \leq 3 - b_{n-1}^2 \leq 3$ et $|b_{n+1}| \leq \dfrac{3}{8}|b_{n-1}|$.

4. Ainsi, par récurrence $|b_{2p+1}| \leq \left(\dfrac{3}{8}\right)^p |b_1|$ et $|b_{2p}| \leq \left(\dfrac{3}{8}\right)^p |b_0|$.

Par conséquent $\lim\limits_{p\to\infty} b_{2p} = 0$ et $\lim\limits_{p\to\infty} b_{2p+1} = 0$.

Par recouvrement des cas possibles, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

En reportant, il vient : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{1}{4}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \dfrac{1}{4}$.

**Exercice 1-16**

Soit $f : x \mapsto \sqrt{|x^2 - 1|}$ et la suite $u = (u_n)$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Donner une représentation graphique de la fonction $f$.

2. Soit $f_1$ la restriction de $f$ à $[1, +\infty[$. Montrer que $f_1$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle à préciser et donner une expression de la bijection réciproque $g$.

3. Soit $v$ la suite définie par $v_0 = 0$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = g(v_n)$. Etudier la monotonie et la nature de la suite $v$.

4. A l'aide de la question 2), montrer que l'étude de la nature de la suite $u$ se ramène au cas où $u_0 \in [0, 1]$.

5. Déterminer, en discutant selon les valeurs de $u_0$, la nature de la suite $u$.

**Solution :**

1.

La courbe est formée d'un demi-cercle et de deux demi-branches d'hyperbole.

2. Pour $x \geq 1$, on a : $y = \sqrt{x^2 - 1} \iff [x = \sqrt{y^2 + 1}$ et $y \geq 0]$, donc $f_1$ réalise une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$, la bijection réciproque $g$ étant définie par :

$$\forall y \geq 0, g(y) = \sqrt{y^2 + 1}$$

3. Sur $\mathbb{R}_+$, on a $g(y) > y$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} > v_n$. La fonction $g$ n'ayant pas de point fixe, la suite $v$ ne peut converger et $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = +\infty$.

4. Si $u_0 < 0$, alors $u_1 > 0$. Quitte à décaler d'un rang, on peut donc supposer $u_0 > 0$.

Si $u_0 > 1$, il existe un rang $p$ tel que $p \geq 1$ et $v_p \leq u_0 < v_{p+1}$, d'où :

$f(v_p) \leq u_1 < f(v_{p+1})$, soit $v_{p-1} \leq u_1 < v_p$, et on recommence jusqu'à :

$$v_1 < u_{p-1} \leq v_2 \text{ et enfin } v_0 < u_p \leq v_1$$

On a donc $0 < u_p \leq 1$, ce qui prouve que, quitte à décaler d'un certain nombre de rangs, on peut supposer $u_0 \in [0, 1]$.

5. Supposons donc $u_0 \in [0, 1]$.

$\star$ Si $u_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, alors la suite est constante et égale à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, la convergence est banale.

$\star$ Sinon, comme on remarque que sur l'intervalle $[0, 1]$, on a $f \circ f(x) = x$, la suite $(u_{2p})$ est constante et égale à $u_0$, tandis que la suite $(u_{2p+1})$ est constante et égale à $u_1$. Comme $u_1 u_0$, la suite est divergente.

**Exercice 1-17**

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}.\ln(t)\,dt$ est convergente. On notera $\ell$ sa valeur.

2. Soit $x > 0$. Etablir que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt = -\ln x + \ell + \int_0^x \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$

( on commencera par justifier l'existence des intégrales).

En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \Big( \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt + \ln x \Big)$.

3. a) Soit $a, b$ des nombres réels strictement positifs. Montrer que l'intégrale

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt$$

est convergente.

b) Etablir que pour $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt = \int_{ax}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt - \int_{bx}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$

En déduire la valeur de $I(a, b)$.

4. Montrer l'existence et donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$.

**Solution :**

1. Soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}.\ln t$. La fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, équivalente à $t \mapsto \ln t$ au voisinage de 0 et dominée par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de

l'infini. La convergence de $\int_0^1 \ln t\,dt$ est connue, donc $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge et la règle de Riemann montre que $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ converge également. On conclut par disjonction des problèmes.

2. $\star$ L'existence de l'intégrale de gauche résulte encore de la règle de Riemann. L'intégrale de droite, ne pose pas de problème car la fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0.

On intègre alors par parties, en dérivant $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ et en intégrant $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ en $t \mapsto \ln t$ (en procédant d'abord sur un segment $[x, y]$, puis en faisant tendre $y$ vers l'infini). On obtient :

$$I(x) = -\mathrm{e}^{-x}\ln x + \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt = \ell - \mathrm{e}^{-x}\ln x - \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\ln t\,dt$$

On réintègre par parties, en intégrant cette fois $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ en $t \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-t}$ :

$$I(x) = \ell - \ln x + \int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$ étant prolongeable par continuité en 0, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt = 0$ et donc :

$$\lim_{x\to 0}\left[\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt + \ln x\right] = \ell$$

3. a) La fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0 et est dominée par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de l'infini. L'intégrale existe bien.

b) Les intégrales écrites étant convergentes pour la borne infinie, on peut écrire, pour $x > 0$ : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}}{t}\,dt - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt.$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variable $u = at$ et dans la seconde, le changement de variable $u = bt$. Il vient :

$$J_{a,b}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt = \int_{ax}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,du - \int_{bx}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,du$$

Soit : $J_{a,b}(x) = \ln\dfrac{b}{a} + \displaystyle\int_{ax}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt + \ln(ax) - \int_{bx}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt - \ln(bx)$

En appliquant deux fois le résultat précédent, $\ell$ disparaît et :

$$I(a,b) = \lim_{x\to 0} J_{a,b}(x) = \ln\frac{b}{a}$$

4. L'existence est acquise, car la fonction à intégrer est continue sur $]0,1[$ et prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$. Le changement de variable (légitime, car de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone) $u=\ln t$ donne :

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-2u}}{u}\,du=\ln 2$$

**Exercice 1-18**

Pour toute fonction $g$ continue sur $\mathbb{R}$, pour tout entier naturel $k$ et tout réel $x$, on pose :

$$T_k(g)\,(x)=\int_0^x (x-t)^k g(t)\,dt.$$

1. Montrer que $T_k(g)$ est de classe $C^1$, pour $k>0$. Calculer alors $[T_k(g)]'$ en fonction de $T_{k-1}(g)$.
(On pourra utiliser la formule du binôme de Newton)

2. Montrer que $T_k$ est une application linéaire injective.

3. Si $g$ est une fonction polynôme de degré $p$, que peut-on dire de $T_k(g)$ ?

4. Soit $a$ un réel strictement positif donné. Pour tout $u\in[-a,a]$, montrer que :

$$\left|\mathrm{e}^u-\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}\right|\leq\frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}C_a$$

où $C_a$ ne dépend que de $a$.

5. En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{T_k(g)\,(x)}{k!}$ lorsque $x$ est fixé et $n$ tend vers l'infini.
On notera $T(g)\,(x)$ cette limite

6. Montrer que $T(g)$ est de classe $C^1$. Calculer $[T(g)]'$.

7. La fonction $g$ étant donnée, exprimer, à l'aide de $T(g)$, toutes les fonctions $f$ de classe $C^1$ telles que :

$$\forall\, x, f'(x)-f(x)=g(x)$$

Indication : on pourra dériver $x\mapsto\big(f(x)-T(g)(x)\big)\mathrm{e}^{-x}$.

**Solution :**

1. En développant la puissance par la formule du binôme de Newton et en utilisant la linéarité de l'intégration, on peut écrire :

$$T_k(g)(x) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^j \int_0^x (-t)^{k-j} g(t)\, dt$$

$t \mapsto (-t)^{k-j} g(t)$ étant continue, on en déduit que $T_k(g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$[T_k(g)]'(x) = \sum_{j=1}^{k} C_k^j j x^{j-1} \int_0^x (-t)^{k-j} g(t)\, dt + \sum_{j=0}^{k} C_k^j x^j (-x)^{k-j} g(x)$$

Dans la seconde somme, on reconnaît $(x-x)^k$ qui vaut 0, sauf pour $k=0$ et dans la première, la transformation $jC_k^j = kC_{k-1}^{j-1}$ permet de reconnaître $k(x-t)^{k-1}$, soit :

$$\forall\, k \geq 1, [T_k(g)]' = kT_{k-1}(g),\ [T_0(g)]' = g$$

2. La linéarité de $T_k$ est banale. Soit alors $g$ telle que $T_k(g) = 0$. En dérivant $k$ fois, il vient $kT_0(g) = 0$, puis en dérivant une fois de plus : $g = 0$. Donc $T_k$ est injective.

3. Si $g$ est une fonction polynôme de degré $p$, alors $T_0(g)$ est une fonction polynôme de degré $p+1$ et en poursuivant $T_k(g)$ est une fonction polynôme de degré $p+k+1$.

4. C'est l'inégalité de Taylor-Lagrange, et on peut prendre $C_a = \mathrm{e}^a$.

5. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \mathrm{e}^{x-t} g(t)\, dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} T_k(g)(x)\right| &= \left|\int_0^x \left[\mathrm{e}^{x-t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x-t)^k\right] g(t)\, dt\right| \\ &\leq \sup_{[-a,a]} |g| \frac{\mathrm{e}^a}{(n+1)!} \left|\int_0^x |x-t|^{n+1}\, dt\right| \\ &\leq \frac{\mathrm{e}^a |x|^{n+2}}{(n+2)!} \sup_{[-a,a]} |g|\end{aligned}$$

Et en faisant tendre $n$ vers l'infini : $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} T_k(g)(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{x-t} g(t)\, dt$.

6. Ainsi, $T(g)(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} g(t)\, dt$ et, en dérivant :

$$[T(g)]'(x) = g(x) + \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} g(t)\, dt$$

7. Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $f'(x) - f(x) = g(x)$, en dérivant :

$$\frac{d}{dx}(f(x) - T(g)(x).\mathrm{e}^{-x}) = 0$$

Donc : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = T(g)(x) + \alpha.\mathrm{e}^x$.

### Exercice 1-19

On pose, pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ :
$$f(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

1. Déterminer l'unique point critique de $f$.
(on rappelle qu'un point critique est un point où les dérivées partielles s'annulent)

2. A-t-on un extremum local en ce point ?

**Solution :**

1. On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(y-x^2)}{(1+x)^2(1+y)(x+y)^2}$ et, symétriquement :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x-y^2)}{(1+x)(1+y)^2(x+y)^2}$$
Comme $x > 0$ et $y > 0$, un point critique $(x,y)$ vérifie $x = y^2$ et $y = x^2$, d'où $x = x^4$ et la seule solution strictement positive est $x = 1$, d'où $y = 1$.

2. On peut calculer les dérivées partielles secondes au point $(1,1)$, mais il est plus rapide de faire un développement limité à l'ordre 2, en posant $x = 1+u$ et $y = 1+v$. On trouve alors :
$$f(x,y) = \frac{1}{8} - \frac{1}{32}(u^2 - uv + v^2) + o(u^2+v^2)$$
Comme $u^2 - uv + v^2 = (u - \frac{1}{2}v)^2 + \frac{3}{4}v^2 > 0$, pour $(u,v)(0,0)$, il s'agit en ce point d'un minimum local.

### Exercice 1-20

1. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\, dt$

2. Comparer sa valeur avec celle de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos t)\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t-1)^2}\, dt$

3. Vérifier que pour $t \in [0,1], 1 - \cos t \leq \frac{1}{2}t^2$ et $\mathrm{e}^t - 1 \geq t$.

   En déduire que : $0 < I < \dfrac{\mathrm{e}-1}{2} + \dfrac{2}{\mathrm{e}-1}$

4. On pose pour tout entier $n$ : $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt$ ,

Montrer que les suites $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(I_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

(on pourra ramener $I_{n+2} - I_n$ à une intégrale sur $[0,\pi]$ )

---

**Solution :**

1. La fonction à intégrer est continue sur $]0,+\infty[$ et se prolonge par continuité en 0 par 1 (car $\sin t \underset{(0)}{\sim} t$ et $e^t - 1 \underset{(0)}{\sim} t$). De plus, au voisinage de l'infini, la fonction est dominée en valeur absolue par $\dfrac{1}{t^2}$ (prépondérance classique de l'exponentielle) et la convergence (absolue) résulte de la règle de Riemann.

2. On intègre par parties sur un segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, en dérivant $t \mapsto \dfrac{1}{e^t - 1}$ en $t \mapsto \dfrac{-e^t}{(e^t-1)^2}$ et en intégrant $t \mapsto \sin t$ en $t \mapsto 1 - \cos t$. Ce choix permet de faire disparaître la limite du crochet de l'intégration par parties et il reste :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos t)e^t}{(e^t-1)^2}\, dt = J$$

3. La seconde inégalité est connue (convexité de la fonction exponentielle). La première se démontre aisément en étudiant les variations sur $[0,1]$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}t^2 - 1 + \cos t$.

On écrit alors : $I = J = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-\cos t)e^t}{(e^t-1)^2}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{(1-\cos t)e^t}{(e^t-1)^2}\, dt$.

En utilisant les inégalités précédentes :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(1-\cos t)e^t}{(e^t-1)^2}\, dt \leq \int_0^1 \frac{e^t}{2}\, dt = \frac{1}{2}(e-1)$$

Pour la seconde intégrale, on se contente de $0 \leq 1 - \cos t \leq 2$, et :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{(1-\cos t)e^t}{(e^t-1)^2}\, dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{2e^t}{(e^t-1)^2}\, dt = \frac{2}{e-1}$$

Ce qui donne l'encadrement voulu.

4 Le changement de variable $t = (2n+1)\pi + u$ donne

$$I_{2n+2} - I_{2n} = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{e^{2n\pi+\pi+u} - 1}\, du$$

On partage alors cette intégrale en deux, en introduisant la borne intermédiaire 0, puis on fait le changement de variable $u \mapsto -u$ dans la première, il vient :

$$I_{2n+2} - I_{2n} = \int_0^{\pi} (\sin u) \Big[ \frac{1}{\mathrm{e}^{2n\pi+\pi-u} - 1} - \frac{1}{\mathrm{e}^{2n\pi+\pi+u} - 1} \Big] \, du$$

L'expression placée entre crochets est clairement positive et donc la suite $(I_{2n})$ est croissante.

Un calcul similaire montre que la suite $(I_{2n+1})$ est décroissante.