1. Pour quelles valeurs de x réel, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ est-elle convergente ? On pose alors :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Montrer que la fonction f est une fonction décroissante sur son domaine de définition.

2. Montrer que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ (on pourra considérer $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$, puis faire tendre N vers l'infini).

3. En considérant $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^x}$, donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

4. Montrer que la fonction f est continue sur $]1, +\infty[$ (on majorera $\frac{1}{n^{x_0+h}} - \frac{1}{n^{x_0}}$ par le terme général d'une série convergente).

1. Pour quelles valeurs de t réel la série $\sum_{n\geq 1} e^{-t\sqrt{n}}$ est-elle convergente ? On pose alors :

$$g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t\sqrt{n}}$$

2. Montrer que g est décroissante sur son domaine de définition.

3. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} g(t)$.

4. a) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

b) Déterminer $\lim_{t\to 0^+} g(t)$

c) Donner un équivalent de $g(t)$ lorsque t tend vers 0^+.

1. Montrer que pour tout $x > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^x} du$ est convergente. On note $f(x)$ sa valeur.

2. Etablir une relation entre $f(x)$ et $f(x+2)$.

3. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, puis $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$.

1. Étudier la convergence des intégrales

$$I = \int_{-1}^{1} f(t)dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_{0}^{+\infty} f(t)dt$$

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_{1/x}^{x^2} f(t)dt$$

2. Déterminer le domaine de définition D de la fonction F.

3. Préciser les limites de F aux bornes de D.

4. Étudier les variations de F. On montrera en particulier que F' s'annule en une unique valeur a qu'on déterminera.
Dresser le tableau de variations de F.

5. Tracer l'allure du graphe de F et préciser son intersection avec l'axe (Ox).

On rappelle les formules de trigonométrie :

$$\sin a + \sin b = 2\,\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin a - \sin b = 2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\,\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

1. Soit $a > 0$ et $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\int_0^a \sin(\lambda\,x)\,f(x)dx\right] = 0$$

De la même manière, on a (et on n'en demande pas la démonstration) :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\int_0^a \cos(\lambda\,x)\,f(x)dx\right] = 0$$

2. Pour $a \in [0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin(nx)}{\sin x}dx$$

a) Justifier la convergence de $I_n(a)$.

b) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[I_{n+1}(a) - I_n(a)\right] = 0$.

3. a) Déterminer $I_n(\pi)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour $a \in]0,\pi[$, écrire une relation entre $I_n(a)$ et $I_n(\pi - a)$.

c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(a) = \frac{\pi}{2}$.

4.a) Justifier la convergence de l'intégrale :

$$J = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

b) Soit $a \in]0,\pi[$. Montrer que la fonction :

$$x \mapsto \phi(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

peut se prolonger en une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[0,a]$.

c) Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nx)}{x}dx$$

et en déduire la valeur de J.

1. Pour $x \in [0,1[$, on pose $h(x) = \ln(1-x)$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée p-ième de h.

b) Soit $x \in [0,1[$ fixé.

Étudier les variations de la fonction $t \mapsto \phi(t) = \dfrac{t-x}{t-1}$ sur l'intervalle $[0,x]$.

En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$:

$$|H_p(x)| \leq x^p \,|\ln(1-x)| \qquad \text{où} \qquad H_p(x) = \int_0^x h^{(p+1)}(t)\,\frac{(x-t)^p}{p!}dt$$

2. Montrer que la fonction $x \mapsto g(x) = \ln(x^2)\ln(1-x^2)$ est bornée sur l'intervalle $]0,1[$.

3. a) Justifier la convergence de l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln\left(x^2\right)\,\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}dx$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, après en avoir justifié la convergence, calculer :

$$I_n = -\int_0^1 \frac{x^{2n}\,\ln\left(x^2\right)}{n+1}dx$$

c) Montrer que :

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)\,(2n+1)^2}$$

4. A-t-on :

$$(\forall x \in [0,1[) \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad ?$$

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit n un entier naturel. On pose $P_n(x) = (1+x^2)^{n+1} f^{(n)}(x)$ où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f.

a) Montrer que l'on a :

$$(1+x^2)P_n'(x) = 2(n+1)xP_n(x) + P_{n+1}(x)$$

b) Établir que P_n est un polynôme dont le terme de plus haut degré est égal à $(-1)^n(n+1)!x^n$.

3. Soit a un réel et g une fonction continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]a, +\infty[$ et qui vérifie $g(a) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

a) On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$G : x \mapsto \begin{cases} g(\frac{1}{x} + a - 1) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que G est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

b) Montrer que G' s'annule en un point de $]0, 1[$. En déduire que g' s'annule en un point de $]a, +\infty[$.

4. Soit h une fonction qui est continue sur l'intervalle $]-\infty, a]$, dérivable sur l'intervalle $]-\infty, a[$, telle que $h(a) = 0$ et telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$. Montrer que h' s'annule en un point de l'intervalle $]-\infty, a[$.

5. Montrer par récurrence sur n que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes.

Soit r un réel strictement positif. On considère un réel strictement positif u_0 et on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en posant :

$$u_{n+1} = \frac{1}{r+u_n^2} \quad \text{si} \quad n \geqslant 0$$

1. Etudier la fonction $x \mapsto x^3 + rx - 1$ et montrer qu'elle s'annule en un seul point ℓ. En déduire que la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{r+x^2}$$

admet un seul point fixe (i.e. il existe un unique x_0 tel que $f(x_0) = x_0$).

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(f(x))$.

a) Que vaut $g(x)$?

b) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c que l'on déterminera, tels que pour tout x réel on a :

$$(1-rx)(r+x^2)^2 - x = (x^3+rx-1)(ax^2+bx+c)$$

c) Déterminer la fonction $x \mapsto h(x) = g(x) - x$.

3. On prend pour r la valeur 1.

a) Montrer que g admet un seul point fixe.

b) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$?

4. On prend pour r la valeur $1/2$.

a) Montrer que g admet trois points fixes. On notera α et β les deux points fixes qui sont différents de ℓ avec $\alpha < \beta$.

b) On pose $E = \{\alpha, \beta, \ell\}$. Montrer que f laisse l'ensemble E invariant (i.e $f(E) = E$). En déduire que $\alpha < \ell < \beta$.

c) Etudier le signe de la fonction h définie par $h(x) = g(x) - x$.

d) Etudier la convergence des suites $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ en fonction de la valeur initiale u_0.

On considère une fonction f définie et continue sur $[0,\pi]$ et l'intégrale

$$I_n = \int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt.$$

1. On suppose dans cette question seulement que f est de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que la suite (I_n) tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

2. On suppose ici que f est seulement de classe C^0 sur $[0,\pi]$. On veut démontrer que le résultat précédent est encore valable.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout n-uplet de réels $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ associe le nombre $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \left(f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \sin(kt)\right)^2 dt.$

On pose $b_k(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(kt)dt.$

Enfin, on rappelle que pour tout couple de réels (a,b), on a

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right).$$

Calculer pour tout couple (k,l) d'entiers strictement positifs l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin(kt)\sin(lt)dt.$$

En déduire que quel que soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2\sum_{k=1}^n a_k b_k(f) + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(t)dt$$

b) Montrer que F admet un minimum global au point $(b_1(f), \cdots, b_n(f))$. Quelle est la valeur de ce minimum ?

c) Montrer que la série $\sum (b_k(f))^2$ est convergente et donner un majorant de sa somme.

d) Conclure.

Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(f(x)) = \sin(f(x))$$

On rappelle les formules trigonométriques suivantes :

$$\begin{cases} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b) \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}dt$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n sont des intégrales convergentes.

Pour $n \geqslant 1$, déterminer $I_n - I_{n-1}$. En déduire la valeur de I_n, pour tout $n \geq 0$.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.

3. Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a,b]$.
En utilisant à une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin[(2n+1)t]dt = 0.$$

4. Soit g l'application définie sur $]0,\pi/2]$ par $g(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)} = \dfrac{\sin(t)-t}{t\sin(t)}$.

Montrer que g est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(I_n - J_n)$ puis $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n$

5. Comparer J_n et $\displaystyle\int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}du$.

En déduire finalement la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du$.

1. Étudier la fonction définie par $f(x) = 1 - \sin x$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

2. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = 1 - \sin u_n$$

Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \geq 3$, on a $\alpha \leq u_n \leq 1$. Etudier la convergence de $(u_n)_{n \geq 0}$.

1. Etudier la fonction réelle $f : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ et tracer sa courbe représentative.

2. Etudier la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n \ln n}$.

3. On considère une suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$x_0 > 0, x_1 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n \ln n} x_{n-2}$$

a) Écrire un programme en Pascal qui calcule et affiche les termes successifs de cette suite pour des valeurs initiales et jusqu'à un rang n entrés par l'utilisateur.

b) Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

c) Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
Que se passe-t-il si on remplace les conditions initiales par $x_0 < 0$ et $x_1 < 0$?

On considère un entier naturel non nul n, et la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution. On notera a_n cette solution.

2. Écrire un programme en Pascal qui détermine et affiche une valeur approchée de a_n à 10^{-2} près pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et convergente.

4. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_n a_n$?

5. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_n n^\alpha \left(a_n - \frac{2}{n^2}\right)$?

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On rappelle que f est convexe sur $\mathbb{R}$ si pour tout entier $n \geq 2$: $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

1. Démontrer que $\sqrt[n]{n!} \leq (n+1)/2$.

2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

3. Étudier la convergence de la suite définie, pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln i}{n^2}\right)$$

Soit a un réel strictement positif. On note $I =]-a, a[$.
Dans tout l'exercice, on considère une application f de $I \times I$ dans I qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times I$ et pour laquelle il existe un réel $k \in [0, 1[$ vérifiant : $\forall (x, y) \in I \times I$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq k$$

1. Soit (x, y) et (x_0, y_0) deux couples de $I \times I$. On définit l'application φ sur $[0, 1]$ par :

$$\varphi(t) = f\left((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty\right)$$

a) Montrer que φ est dérivable sur $[0, 1]$ et exprimer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f.

b) En déduire que

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq k. \max(|x - x_0|, |y - y_0|)$$

2. Soient $(\alpha, \beta) \in I \times I$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \alpha, \quad u_1 = \beta, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \max(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+1} - u_n|)$.

a) Etudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2}\hat{\text{E}} \leq k a_n$.

c) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.

d) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. Montrer que la limite de la suite (u_n) est indépendante du couple (α, β).

Dans tout l'exercice, g désigne une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, qui est périodique de période 1.

1. a) Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)\,dx$ est convergente. On pose alors $G(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)\,dx$.

b) Montrer que $G(\lambda)$ admet une limite quand λ tend vers $+\infty$ et préciser sa valeur.

2. a) Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$,

$$G(\lambda) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)\,dx$$

b) Justifier l'existence d'un réel positif M tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |\mathrm{e}^{-x} - 1 + x| \leq Mx^2$$

et en déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda x} g(x)\,dx$.

c) Montrer que $G(\lambda)$ possède une limite finie quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = 0$ et montrer que cette limite vaut alors $\displaystyle\int_0^1 -xg(x)\,dx$.

3. Dans cette question on suppose de plus que g est à valeurs positives ou nulles et que g est différente de la fonction nulle.
Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, décroissante et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

a) Montrer que $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ est strictement positif.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$\int_{n-1}^{n} f(x)g(x)\,dx \geq J.\int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

c) En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$.

1. Etudier pour un réel x donné, la convergence des intégrales

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

2. Montrer que pour a et h réels :

$$|\cos(a+h) - \cos(a) + h\sin(a)| \leq \frac{1}{2}h^2$$

3. En déduire que

$$|F(x) - F(x_0) - (x-x_0)G(x_0)| \leq \frac{1}{2}(x-x_0)^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

4. Montrer que la fonction F est dérivable, quelle est sa dérivée ?

5. On pose $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\, dt$

Montrer par une méthode analogue à celle des questions 3 et 4 que G est dérivable et que $G'(x) = H(x)$

6. Vérifier que $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{-\mathrm{e}^{-t}\cos(tx) + x.\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{1+x^2}\right) = \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}$.

En déduire $H(x)$.

7. A l'aide du changement de variable $x = \tan u$ dans $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, calculer $G(1)$. En déduire que $F(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

1. Montrer que pour x réel non nul, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$ est convergente.

Dans la suite de l'exercice, on pose alors $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$

2. Montrer que f est une fonction paire et déterminer le signe de $f(x)$.

3. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. A l'aide d'un changement de variable simple, montrer que pour $x > 0$, on a :

$$x.f(x) = f(\frac{1}{x})$$

5. En découpant l'intégrale définissant $f(x)$ à l'aide de la borne intermédiaire $\sqrt{x}$, et en effectuant un changement de variable dans la seconde intégrale, montrer que pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$$

6. a) Quelle est la dérivée de la fonction $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$? En déduire, pour $x > 0$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

b) Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) \leq \dfrac{2}{x}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$. En déduire $\lim\limits_{+\infty} f$.

7. a) Montrer que pour $x > 0$:

$$0 \leq \frac{2}{x}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - f(x) \leq \frac{2}{x^3}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{1}{x^2}$$

En déduire que $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{\ln x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

b) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

On note f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \text{ est strictement positif} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note I_n l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Préciser sa dérivée à droite en zéro.
Montrer que f est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$, de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, montrer que la dérivée de f s'annule sur I_n en un unique point noté x_n.

4. Montrer l'existence de deux suites réelles $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(y_n) = \frac{1}{y_n},\ f(z_n) = -\frac{1}{z_n}, \text{ avec } y_n \text{ dans } I_{2n} \text{ , et } z_n \text{ dans } I_{2n+1}.$$

Déterminer la dérivée de f en y_n et en z_n. Que peut-on en conclure ?

5. Etudier les variations de f sur I_0, puis sur I_{2n} et I_{2n-1}, pour $n \geqslant 1$.

6. Tracer la courbe représentative de f sur $[0, 3\pi]$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on considère l'équation (E_n) définie par :

$$(E_n) \quad x^{n+2} - 2.x^{n+1} + x^n + x^3 - (2+n)x^2 + x(1+2n) - n = 0$$

1. Montrer que 1 est solution de (E_n) et déterminer son ordre de multiplicité en fonction de n.

2. a) Désormais on suppose que n est supérieur ou égal à trois. Montrer qu'il existe une solution et une seule de (E_n) dans l'intervalle $]1, +\infty[$. Dans la suite on note a_n cette solution.

b) Ecrire un programme turbo-pascal permettant d'obtenir une valeur approchée de a_3 à ε près, $\varepsilon > 0$ étant donné.

3. Montrer que la suite de terme général a_n converge et déterminer sa limite L (on pourra, par exemple, comparer a_n et $1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, pour n assez grand).

4. Déterminer un équivalent simple de $a_n - L$, quand n tend vers l'infini.

On considère la suite $x = (x_n)$ définie par :

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{2}, \text{ et } \forall n \geq 2, (n^2+1)x_n = (2n^2 - n)x_{n-1} - (n^2 - n)x_{n-2}$$

1. On considère la suite $y = (y_n)$ définie par : $y_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, y_n = n(x_n - x_{n-1})$. Calculer x_n en fonction de y_n, y_{n-1} et n.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note z_n le nombre complexe de partie réelle x_n et de partie imaginaire y_n.

a) Calculer z_n en fonction de z_{n-1} et de n.

b) Montrer que $z_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{i+k}\right)$ (i étant le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

3. On pose $1 + \frac{i}{k} = \frac{1}{r_k} e^{i\theta_k}$, avec $r_k > 0$ et $0 < \theta_k < \frac{\pi}{2}$.

a) Calculer r_k en fonction de k.

b) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k$. Calculer x_n en fonction de S_n et de $P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

4. Montrer que la suite x est bornée.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction φ_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\varphi_n(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+t^n}$.

1. a) Etudier la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi_n(t)\,dt$ (on donnera le tableau des variations et les limites aux bornes du domaine de définition).

b) Soit a un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un unique réel, noté $x_n(a)$ tel que $\displaystyle\int_0^{x_n(a)} \varphi_n(t)\,dt = a$.

2. On note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h_n(a) = x_n(a)$.

a) Montrer que la fonction h_n est croissante.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} h_n(a) = +\infty$.

3. On suppose dans cette question que $a > \mathrm{e} - 1$, où e désigne la base des logarithmes népériens. Soit A un réel fixé, strictement supérieur à 1 et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{, si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{, si } t > 1 \end{cases}$.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^A \varphi_n(t)\,dt = \int_0^A g(t)\,dt$.

b) On pose $J_n = \displaystyle\int_A^{x_n(a)} \varphi_n(t)\,dt$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n$.

c) Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, J_n > 0$.

En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n(a) = +\infty$.

On admet que $n! \underset{(n\to\infty)}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

1. a) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de nombres réels positifs de limite nulle. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$.

Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ sont adjacentes et en déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

b) Quelle est la nature de la série de terme général $b_n = (-1)^n[\ln(n+1) - \ln n]$?

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $K_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{(-1)^{E(\frac{1}{x})}}{x}\, dx$, où E désigne la fonction partie entière, c'est-à-dire que $E(t)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à t.

a) Montrer que $K_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \displaystyle\int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{(-1)^k}{x}\, dx$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} K_n$.

Soit $\sum_n a_n$ une série à termes positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, b_n = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln x$ est concave sur $]0, +\infty[$.

2. En déduire que, pour tout $n \geq 2$ et pour tous réels $x_1, \dots, x_n$ positifs ou nuls :

$$n \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq (n-1) \sqrt[n-1]{x_1 \dots x_{n-1}} + x_n$$

3. En déduire, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$ et pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels positifs :

$$\mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n \leq \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$$

où

$$\mu_k = \begin{cases} k(\lambda_k^{1/k} - 1) & \text{si } k < n \\ n\lambda_k^{1/n} & \text{si } k = n \end{cases}$$

4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k \leq \mathrm{e}$.

5. On suppose que la série $\sum_n a_n$ converge. Montrer que la série $\sum_n b_n$ converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \mathrm{e} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et telle que $f(0)=0$. On définit alors la fonction φ sur $]0,1]$ par : $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

1. Montrer que φ peut être prolongée en une fonction, notée $\widetilde{\varphi}$, continue sur $[0,1]$.

2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à f sur le segment $[x,0]$, et la formule de Leibniz, montrer que :

$$\forall\, x \in\ ]0,1],\, x^{n+1}\varphi^{(n)}(x)=\int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

3. Montrer que la fonction $\varphi^{(n)}$ a une limite en 0 et l'exprimer en fonction de $f^{(n+1)}(0)$.

4. Montrer que $\widetilde{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

On considère la suite de terme général $u_n = \left(\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^n}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}$, pour $n \geq 1$.

1. Calculer u_1.

2. Montrer que : $\forall\, n \geq 1$, on a : $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$.

3. Soit $a \in [0,1]$, montrer que $u_n \geq (1-a)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{a}{1+a}$.

4. Montrer, en utilisant une suite (a_n) bien choisie de points de $[0,1]$, que la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Soient a et b deux réels distincts.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un unique polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_a^x (t-a)^{n-1}(t-b)^{n-1}\, dt = (x-a)^n P_n(x).$$

Préciser le degré de P_n.

2. Calculer $P_n(a)$.

3. On pose, pour p et q entiers naturels, $I(p,q) = \displaystyle\int_a^b (t-a)^p(t-b)^q\, dt$.

a) Déterminer une relation entre $I(p,q)$ et $I(p+1,q-1)$, lorsque $q \geqslant 1$. En déduire l'expression de $I(p,q)$ en fonction de p et q.

b) En déduire $P_n(b)$.

4. En remarquant que $t-b = (t-a)+(a-b)$, déterminer une expression de $P_n(x)$ en fonction des puissances de $(x-a)$.
En déduire $P_n^{(k)}(a)$, pour $k \in \mathbb{N}$ (où $P_n^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième du polynôme P_n).

Pour x réel positif ou nul et n entier naturel non nul, on pose :

$$s_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

1. Ecrire un programme en Turbo-Pascal, permettant la saisie du réel x, de l'entier n et affichant la valeur de $s_n(x)$.

2. Montrer que $s_n(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt - \ln(1+x)$ est une constante.

3. Donner, en fonction de n et de x, un majorant de la valeur absolue de l'erreur commise en remplaant $\ln(1+x)$ par $s_n(x)$.

4. Pour $x \in [0,1]$ fixé, déterminer la limite de la suite $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire la convergence et la somme de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Soit f l'application définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \frac{1}{1-y^2} \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f. Montrer que $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathcal{D}$.

3. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$:

$$2yf(x,y) + (1-x^2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - (1-y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

4. Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout y tel que $0 < y < 1$:

$$\left|\ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\right| \leq |\ln y|$$

En déduire que pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,dy$ est convergente.

5. Exprimer $\displaystyle\int_0^1 f(0,y)\,dy$ à l'aide d'une série classique.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g'(x)$ pour tout x réel.

2. Montrer qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que pour tout $n \geq 1$ et pour tout x non nul, on ait :

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x) \sin^{(n)}(x) + Q_n(x) \sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}$$

où $f^{(k)}(x)$ désigne la dérivée k-ième de la fonction f.
(On déterminera une expression de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.)

3. Montrer que P_n et Q_n sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Préciser le degré, la parité et le coefficient du terme de plus haut degré de chacun de ces polynômes.

4. En écrivant que $\sin(x) = x.g(x)$, déterminer deux nouvelles relations entre $P_n, Q_n, P_{n+1}, Q_{n+1}$. En déduire que $P_n' = Q_n$.