1

ANALYSE

Exercice 1.1.

Soit f la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $f(x_1,\dots,x_n)=\big(\sum\limits_{k=1}^n x_k\big)\big(\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{x_k}\big)$

1. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

2. Déterminer les points critiques de f et donner la valeur de f en ces points.

3. On se propose de montrer qu'en ces points, f admet un *minimum* global :

Première méthode

On pose, pour tout réel t, $P(t)=\sum\limits_{k=1}^n \big(t\sqrt{x_k}+\dfrac{1}{\sqrt{x_k}}\big)^2$.

Développer $P(t)$ en ordonnant suivant les puissances de t. En considérant le discriminant de $P(t)$, prouver l'inégalité demandée. A quelle condition nécessaire et suffisante cette inégalité est-elle une égalité ?

Deuxième méthode

a) Pour toute famille $y_1,\dots,y_n$ de réels strictement positifs, montrer que :

$$\prod_{k=1}^n y_k = 1 \implies \sum_{k=1}^n y_k \geqslant n$$

(On procèdera par récurrence, et, dans le passage du rang n au rang $n+1$, on utilisera, après avoir justifié leur existence, deux termes y_j et y_k tels que $y_j \leqslant 1 \leqslant y_k$.)

b) On pose $P=\big(\prod\limits_{k=1}^n x_k\big)^{1/n}$. Montrer que pour tout réel α, $\sum\limits_{k=1}^n x_k^\alpha \geqslant n.P^\alpha$ et en déduire le résultat demandé.

Troisième méthode

Pour tout réel x strictement positif, montrer l'inégalité : $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
Vérifier que $\big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\big)\big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}\big) = n + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \big(\dfrac{x_i}{x_j} + \dfrac{x_j}{x_i}\big)$ et en déduire le résultat demandé.

Solution :

1. L'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, comme somme d'applications de classe $\mathcal{C}^2$.
L'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}^*)^n$, comme somme d'applications de classe $\mathcal{C}^2$.
Le produit est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}^*)^n$, *a fortiori* sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

2. Un calcul immédiat donne, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} + \sum_{j=1}^{n} x_j\big(-\frac{1}{x_k^2}\big)$$

Ainsi le gradient de f s'annule si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :
$\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{x_j} + \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\big(-\dfrac{1}{x_k^2}\big) = 0$, ou encore : $x_k^2 = \dfrac{\sum_j x_j}{\sum_j \frac{1}{x_j}}$
Ceci montre que les x_k sont tous égaux.
Réciproquement, on vérifie que pour tout $a > 0$, le point $(a, \ldots, a)$ est un point critique de f, et que $f(a, \ldots, a) = n^2$.

3. a) Immédiatement :

$$P(t) = t^2 \sum_{k=1}^{n} x_k + 2nt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

Le trinôme P est positif sur $\mathbb{R}$, son discriminant (réduit) est donc toujours négatif ou nul. Donc :

$$n^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

Le discriminant de P est nul si et seulement si P possède une racine double t_0, c'est–à–dire si et seulement s'il existe un réel t_0 tel que $P(t_0) = 0$. Donc :

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \big(t_0\sqrt{x_k} + \frac{1}{\sqrt{x_k}}\big)^2 \implies \forall\, k \in [\![1, n]\!], t_0\sqrt{x_k} + \frac{1}{\sqrt{x_k}} = 0$$

ce qui montre qu'on a égalité si et seulement si les x_k sont tous égaux.

b) La relation est évidente pour $n = 1$.

Supposons l'implication vérifiée pour $n \geqslant 1$ et considérons $(n+1)$ réels strictement positifs tels que $\prod_{k=1}^{n+1} y_k = 1$. Si, pour tout k, $y_k < 1$, cette égalité est impossible. De même, si pour tout k, $y_k > 1$.
Il existe donc deux indices $i \neq j$ tels que $y_i \leqslant 1 \leqslant y_j$. On écrit alors :

$$\prod_{k=1}^{n+1} y_k = (y_i y_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n+1} y_k = 1$$

On a donc un produit de n réels qui vaut 1.
Par l'hypothèse de récurrence, on sait que :

$$y_i y_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n+1} y_k \geqslant n$$

ou

$$\sum_{k=1}^{n+1} y_k \geqslant n + y_j + y_i - y_i y_j$$

Or $y_j + y_i - y_j y_i = y_j(1 - y_i) + y_i \geqslant 1 - y_i + y_i = 1$, ce qui termine la démonstration.

On a $\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^\alpha}{p^\alpha}\right) = 1$, d'où, par le résultat précédent $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^\alpha}{p^\alpha} \geqslant n$.

Il suffit d'appliquer le résultat précédent pour $\alpha = 1/2$, puis $\alpha = -1/2$. Il vient

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \geqslant n\sqrt{P}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_k}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{P}}$$

On obtient le résultat souhaité en effectuant le produit membre à membre.

c) Il suffit d'écrire que $x + \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{(x-1)^2}{x}$
On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i} + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{x_i}{x_j} = n + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right)$$

Or :

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right) \geqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2 = 2\binom{n}{2}$$

ce qui avec l'inégalité précédente, donne le résultat souhaité.

Exercice 1.2.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Étudier la suite (a_n) définie par $a_n = H_n - \ln n$.

b) Montrer qu'il existe un réel γ de $[0,1]$ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

2. On se propose d'étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right).$$

a) Soit (b_n) une suite réelle décroissante de limite nulle.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$.

Montrer que les suites (S_{2p}) et (S_{2p+1}) sont adjacentes et en déduire que la série de terme général $(-1)^n b_n$ est convergente.

b) Montrer que $\ln u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{2} H_n + \sum\limits_{k=1}^{n} w_k$, où w_k est le terme général d'une série convergente. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers l'infini.

c) Montrer qu'il existe $L > 0$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\ln u_n + \dfrac{1}{2} \ln n\right) = L$.

En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Solution :

1. a) On a l'inégalité classique, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$$

que l'on obtient par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à n, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln n, \text{ d'où } a_n \geqslant 0$$

D'autre part, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$, et les inégalités précédentes montrent que $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$.

b) La suite (a_n) est une suite de réels positifs, décroissante. Elle converge donc vers un réel γ. On écrit ainsi $a_n = \gamma + o(1)$, ou $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$. De plus $0 \leqslant a_n \leqslant a_1 \implies 0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

2. a) Montrons que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
En effet :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = b_{2n+2} - b_{2n+1} \leqslant 0, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = b_{2n+2} - b_{2n+3} \geqslant 0$$

et :

$$S_{2n+2} - S_{2n+1} = b_{2n+2} \to 0$$

b) Les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite S, ce qui prouve que la suite (S_n) tend également vers S.

c) Par positivité :

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$$

Au voisinage de 0, on peut écrire :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Donc :

$$\ln\big(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\big) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + \frac{(-1)^{k-1}}{k\sqrt{k}} + o\big(\frac{1}{k\sqrt{k}}\big)$$

Les séries $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k\sqrt{k}}$ et $\sum o\big(\frac{1}{k\sqrt{k}}\big)$ sont absolument convergentes. Ainsi, il existe une série $\sum w_k$ absolument convergente telle que

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}\, H_n + \sum_{k=1}^{n} w_k$$

Par la question 2.a), on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ existe, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} w_k$ existe et que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$. Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$, ce qui entraîne par continuité de la fonction exponentielle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On remplace H_n par $\ln n + \gamma + o(1)$. Il vient :

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma + o(1)) + \sum_{k=1}^{n} w_k$$

ou

$$\ln u_n + \frac{\ln n}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}(+\gamma + o(1)) + \sum_{k=1}^{n} w_k$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\ln u_n + \frac{\ln n}{2}\big) = L$. Par continuité de la fonction exponentielle :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}u_n = \mathrm{e}^L \neq 0$$

soit :

$$u_n \sim \frac{\mathrm{e}^L}{\sqrt{n}}$$

La série $\sum u_n$ est donc divergente.

Exercice 1.3.

Soit f la fonction définie sur $]0,\pi]$ par :

$$f : x \mapsto \int_0^x \ln(2\sin\frac{t}{2})\,dt$$

1. Montrer que f est bien définie sur $]0,\pi]$ et admet un prolongement par continuité en $x = 0$.

2. On pose $I = f(\pi)$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi \ln(2\cos\frac{t}{2})\,dt$.

Montrer que $I = J$, puis, en utilisant $I + J$, montrer que $f(\pi) = 0$.

3. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$f(x) = \int_\pi^x \ln(2\sin\frac{t}{2})\,dt$$

4. a) Étudier la dérivabilité de f sur $]0, \pi]$.

b) Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.

Montrer que f admet un extremum valant $\alpha = -2\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{x\cos x}{\sin x}\,dx$.

Solution :

1. Soit $\varphi : t \mapsto \ln\big(2\sin(t/2)\big)$. La fonction φ est continue sur $]0, \pi]$.
Au voisinage de 0, on peut écrire :

$$\ln\big(2\sin(t/2)\big) = \ln\big(t + o(t)\big) = \ln(t) + o(1)$$

La fonction φ est donc équivalente à la fonction $t \mapsto \ln t$ qui est intégrable sur $]0, a]$.

Donc $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,dt$ est bien définie sur $]0, \pi]$.

La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0 \ldots$ suffit à prouver que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, on peut donc poser $f(0) = 0$.

2. On montre que $J = \displaystyle\int_0^\pi \ln(2\cos t/2)dt$ existe, en raisonnant comme dans la question précédente.
Le changement de variable $u = \pi - t$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif montre que $J = I$.
Donc :

$$2I = I + J = \int_0^\pi \ln(4\sin t/2\cos t/2)\,dt = \pi\ln 2 + \int_0^\pi \ln(\sin t)\,dt$$

$$\begin{aligned} 2I &= \pi\ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt + \int_{\pi/2}^\pi \ln(\sin t)\,dt \\ &= \pi\ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt + \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin u)(-du) \\ &= \pi\ln 2 + 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt = \pi\ln 2 + \int_0^\pi \ln(\sin u/2)\,du = I \end{aligned}$$

Donc

$$I = J = 0.$$

3. a) On sait que si $t \in [0, \pi/2]$, $\dfrac{2}{\pi}t \leqslant \sin t \leqslant t$ (étudier les variations de fonctions associées ou invoquer la concavité de la fonction sin sur $[0, \pi/2]$).
Donc, pour $t < 1$, $\ln(2\sin t/2) \leqslant \ln t \leqslant 0$, et :

$$f(x) \leqslant \int_0^x \ln t \, dt = x \ln x - x$$

Ainsi :

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \ln x - 1, \text{ ce qui entraîne } \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

b) Comme $f(\pi) = 0$, il vient :

$$f(x) = \int_0^x \ln(2 \sin t/2) \, dt = -\int_x^\pi \ln(2 \sin t/2) \, dt = \int_\pi^x \ln(2 \sin t/2) \, dt$$

4. a) La fonction φ étant continue sur $[x, \pi]$, l'égalité précédente et le théorème fondamental du calcul intégral montrent que f est dérivable en tout $x \in]0, \pi]$ et que $f'(x) = \ln(2 \sin x/2)$.

b) L'équation $f'(x) = 0$ n'admet qu'une solution : $x = \pi/3$. La fonction f est décroissante sur $[0, \pi/3]$, puis croissante sur $[\pi/3, \pi]$.

Elle atteint un *minimum* $\alpha < 0$ en $\pi/3$ qui vaut, après intégration par parties :

$$\alpha = \int_0^{\pi/3} \ln(2 \sin t/2) \, dt = -2 \int_0^{\pi/6} \frac{x \cos x}{\sin x} \, dx < 0$$

Exercice 1.4.

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant le pavé $[a, b] \times [c, d]$ (avec $a < b$ et $c < d$) et f une fonction définie sur U, à valeurs réelles, et de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour $x \in [a, b]$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_c^d f(x, t) \, dt$.

a) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times [c, d], \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leqslant M$$

b) Soit $x \in \,]a, b[$, h un réel non nul tel que $x + h \in \,]a, b[$. Montrer que :

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \, dt \right| \leqslant |h|(d - c) \frac{M}{2}$$

c) En déduire que F est dérivable sur $]a, b[$ et donner une expression de sa dérivée.

2. On se place dans les hypothèses précédentes.

a) Soit H la fonction de deux variables définie par $H(x, y) = \displaystyle\int_c^y f(x, t) \, dt$. Donner les dérivées partielles de H.

b) Soit u, v des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs respectivement dans $[a, b]$ et $[c, d]$, on pose $G(z) = \displaystyle\int_c^{v(z)} f(u(z), t) \, dt$. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

3. Pour $z > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $F_n(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{t^n}{(1 + zt)^n} \, dt$.

Montrer que F_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en déduire que F_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F définie sur $[a,b]$ par :

$$F(z) = \int_a^z \frac{(z-t)^n}{n!}\, f(t)\, dt$$

a) Calculer, en justifiant l'existence, $F^{(p)}(z)$ pour $0 \leqslant p \leqslant n+1$.

b) Calculer $F^{(p)}(a)$, pour $0 \leqslant p \leqslant n$. Quel résultat retrouve-t-on ?

Solution :

1. a) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]\times[c,d]$, $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|$ est continue sur le fermé borné $[a,b]\times[c,d]$, elle est donc bornée par une constante M que l'on peut choisir strictement positive.

b) On peut écrire :

$$\begin{aligned}\Delta &= \Big|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt\Big|\\ &= \frac{1}{|h|}\Big|F(x+h)-F(x) - h\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt\Big|\\ &= \frac{1}{|h|}\Big|\int_c^d f(x+h,t)-f(x,t)-h\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt\Big|\end{aligned}$$

$$\Delta \leqslant \frac{1}{|h|}\int_c^d \Big|f(x+h,t)-f(x,t)-h\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big|\, dt$$

On applique l'inégalité de Taylor à la fonction $x \mapsto f(x,t)$, à t fixé. Il vient :

$$\Big|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt\Big| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_c^d \frac{h^2}{2} M\, dt = |h|(d-c)\frac{M}{2}$$

c) On déduit de la question précédente que la fonction F est dérivable en tout x, et que

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$$

2. a) On a :

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = f(x,y), \qquad \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \int_c^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$$

b) Par la formule de composition des dérivées, il vient :

$$G'(z) = u'(z)\frac{\partial H}{\partial x}(u(z),v(z)) + v'(z)\frac{\partial H}{\partial y}(u(z),v(z))$$

soit :

$$G'(z) = u'(z) f(u(z),v(z)) + v'(z)\int_0^{u(z)} \frac{\partial f}{\partial v}(v(z),t)\, dt$$

3. On se trouve dans la situation de la question précédente avec $u(z) = v(z) = z$ et $f(x,t) = \dfrac{1}{(1+xt)^n}$. On obtient donc :

$$F_n'(z) = \frac{z^n}{(1+z^2)^n} - n\int_0^z \frac{t^{n+1}}{(1+tz)^{n+1}}\,dt = \frac{z^n}{(1+z^2)^n} - nF_{n+1}(z)$$

Comme F_{n+1} est dérivable, cette dernière formule montre que F_n est deux fois dérivable, puis $\mathcal{C}^\infty$ par récurrence.

4. a) On applique la même méthode. Il vient :

$$F'(z) = \int_a^z \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,f(t)\,dt$$

et, pour tout $p \in [\![0,n]\!]$:

$$F^{(p)}(z) = \int_a^z \frac{(z-t)^{n-p}}{(n-p)!}\,f(t)\,dt$$

En particulier $F^{(n)}(z) = \displaystyle\int_a^z f(t)\,dt$, et $F^{(n+1)}(z) = f(z)$

b) Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, $F^{(p)}(a) = 0$. Donc :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(z-a)^k}{k!}\,F^{(k)}(a) + \int_a^z \frac{(z-t)^n}{n!}\,F^{(n+1)}(t)\,dt$$

On retrouve la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 1.5.

L'objet de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions h continues sur $]-1,+\infty[$ vérifiant pour tout x et tout y de $]-1,+\infty[$ la relation :

$$h(x) + h(y) = h(x+y+xy)$$

Pour f solution de ce problème, on note F la primitive de f nulle en 0.

1. a) Montrer que si x et y sont deux éléments de $]-1,+\infty[$, il en est de même de $x+y+xy$.

b) Déterminer, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, un changement de variable affine ($t = au+b$) et une fonction g_x tels que :

$$\forall\, y \in]-1,+\infty[,\ \int_x^{x+y+xy} f(t)\,dt = \int_0^y g_x(t)dt$$

c) Soit $y \neq 0$. Exprimer $f(x)$ en fonction de $F(x), F(y)$ et $F(x+y+xy)$. En déduire la dérivabilité de f sur $]-1,+\infty[$.

2. a) Déterminer une relation entre $f'(x)$ et $f'(x+y+xy)$ pour x et y dans $]-1,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout y dans $]-1,+\infty[$, $f'(0) = (1+y)f'(y)$.

c) En déduire l'expression d'une fonction vérifiant la relation proposée.

d) Conclure.

Solution :

1. a) On a les équivalences suivantes :

$$x+y+xy>-1 \iff x+1+y(x+1)>0 \iff (x+1)(y+1)>0$$

Donc

$$x>-1, y>-1 \implies x+y+xy>-1$$

b) On a l'équivalence :

$$\begin{cases} x=b \\ x+y+xy=ay+b \end{cases} \iff \begin{cases} b=x \\ a=1+x \end{cases}$$

Ainsi :

$$\int_x^{x+y+xy} f(t)\,dt = \int_0^y f\big((1+x)u+x\big)(1+x)\,du$$

ou :

$$\int_x^{x+y+xy} f(t)\,dt = \int_0^y [f(x)+f(u)](1+x)\,du$$

c) On a :

$$F(x+y+xy)-F(x) = y(1+x)f(x)+(1+x)F(y)$$

Donc, pour tout $x>-1$, pour tout $y\neq 0$:

$$f(x)=\frac{1}{y}\Big[\frac{F(x+y+xy)-F(x)}{1+x}-F(y)\Big]$$

Comme F est dérivable sur $]-1,+\infty[$, il en est de même pour f.

2. a) Il suffit de dériver la relation de départ par rapport à x, à y fixé, pour obtenir :

$$f'(x)=f'(x+y+xy)(1+y)$$

b) Avec $x=0$, pour tout $y>-1$, il vient $f'(0)=(1+y)f'(y)$.

c) Pour $y>-1$

$$f'(y)=\frac{f'(0)}{1+y} \implies f(y)-f(0)=\int_0^y f'(u)\,du = f'(0)\ln(1+y)$$

On vient ainsi de montrer que si le problème admet une solution, celle–ci est de la forme :

$$f(y)=a+b\ln(1+y)$$

d) Réciproquement, si f est de la forme $f(y)=a+b\ln(1+y)$, alors f vérifie l'équation $f(x)+f(y)=f(x+y+xy)$ si et seulement si $a=0$ et b est quelconque.

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation proposée est

$$\{x\longmapsto b\ln(1+x), b\in\mathbb{R}\}$$

Exercice 1.6.

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\, dx$.

1. a) Montrer que cette intégrale est convergente pour tout $n \geqslant 1$.

   b) Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} pour $n \geqslant 1$.

Dans la suite, on pose $u_n = n^{1/3} I_n$, $v_n = \ln(u_n)$ *et* $w_n = v_{n+1} - v_n$.

2. a) Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de w_n.
Quelle est la nature de la série de terme général w_n ? En déduire la nature de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

   b) Montrer que, au voisinage de l'infini, I_n est équivalente à $\dfrac{k}{n^{1/3}}$, où k est une constante que l'on ne demande pas de déterminer.
Que peut-on en déduire quant à la nature de la série de terme général I_n ?

3. a) Soit $J_n = (-1)^n I_n$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} J_k$.

Montrer que $S_n = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{2+x^3}\, dx$

   b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^3)(1+x^3)^n} = 0$.

   c) Quelle est la nature de la série de terme général $(-1)^n I_n$?

Solution :

1. a) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x \geqslant 0$

$$0 \leqslant \frac{1}{(1+x^3)^n} \leqslant \frac{1}{x^{3n}}$$

ce qui montre que l'intégrale I_n existe.

   b) On écrit

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\, dx - \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\, dx$$

et, pour $A > 0$:

$$\int_0^A \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+1}}\, dx = \int_0^A \frac{x}{3n} \times \frac{n3x^2}{(1+x^3)^{n+1}}\, dx$$
$$= \frac{1}{3n}\left[\frac{-x}{(1+x^3)^n}\right]_0^A + \frac{1}{3n}\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^n}$$

En prenant la limite lorsque A tend vers l'infini, il vient :

$$I_{n+1} = \tfrac{3n-1}{3n} I_n$$

2. a) Il vient

$$\begin{aligned}w_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)\\ &= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right) + \left(-\frac{1}{3n}-\frac{1}{18n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= -\frac{2}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

La série de terme général w_n est de signe constant et son terme général est équivalent à celui d'une série de Riemann convergente. Elle converge. Soit S sa somme. Alors :

$$\sum_{k=1}^{N-1} w_k = v_n - v_1 \implies \lim_{n\to+\infty} v_n = v_1 + S$$

Par continuité de la fonction exponentielle, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{v_1+S} = C > 0$$

b) La série $\sum I_n$ diverge, puisque par la question précédente $I_n = \dfrac{u_n}{n^{1/3}} \sim \dfrac{C}{n^{1/3}}$.

3. a) Comme somme finie d'intégrales convergentes :

$$\begin{aligned}S_n &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{1+x^3}\right)^k dx = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{1+x^3}\,\frac{1-\left(\frac{-1}{1+x^3}\right)^n}{1+\frac{1}{1+x^3}}\,dx\\ &= -\int_0^{+\infty}\frac{dx}{2+x^3} + (-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^3)(1+x^3)^n}\end{aligned}$$

b) Comme

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(2+x^3)(1+x^3)^n} \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}} = I_{n+1} \sim \frac{C}{n^{1/3}} \longrightarrow 0,$$

on conclut à la convergence de la suite (S_n).

c) La série $\sum(-1)^n I_n$ est donc convergente sans être absolument convergente.

Exercice 1.7.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{0,\ldots,n\}$.

Pour tout t réel, on pose $L_X(t) = E(\mathrm{e}^{-tX})$, $\varphi(t) = \ln L_X(t)$. On note I le domaine de définition de φ.

Enfin, pour tout a réel, on pose

$$h(a) = \sup_{t\in I}\big(ta - \varphi(t)\big) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$$

1. On suppose dans cette question que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

a) Calculer $L_X(t), \varphi(t)$ ainsi que I.

b) Déterminer $h(a)$ (on s'attachera plus particulièrement aux valeurs de a pour lesquelles $h(a)$ est fini.)

2. On revient maintenant au cas général.

a) Exprimer $L_X(t)$ en fonction d'une somme finie.

b) Calculer $L'_X(t)$ puis $L''_X(t)$. Montrer que pour tout t réel

$$(L'_X(t))^2 \leqslant L_X(t) \times L''_X(t)$$

c) Montrer que φ est une fonction de classe C^2, convexe sur I. Déterminer le signe de φ' ainsi que ses variations.

d) Montrer que lorsque $h(a)$ est fini :

$$h(a) = a \times (\varphi')^{-1}(a) - \varphi\big((\varphi')^{-1}(a)\big)$$

Solution :

1. a) On a :

$$L(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{tk} p^k (1-p)^{n-k} = (p.\mathrm{e}^t + 1 - p)^n$$

Ainsi $\varphi(t) = n \ln(p.\mathrm{e}^t + 1 - p)$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{R}$.

b) La fonction $\psi : t \mapsto ta - \varphi(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout t réel :

$$\psi'(t) = a - n \frac{p.\mathrm{e}^t}{p.\mathrm{e}^t + q}$$

Donc :

$$\psi'(t) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^t = \frac{qa}{p(n-a)}$$

• si $a \geqslant n$, cette équation n'a pas de solution. La fonction ψ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $h(a) = +\infty$.

• si $a \leqslant 0$, cette équation n'a pas de solution. La fonction ψ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $h(a) = +\infty$.

• si $0 < a < n$, cette équation a comme unique solution $t = \ln\big(\dfrac{qa}{p(n-a)}\big)$. La fonction ψ passe par un *maximum* en ce point, *maximum* qui vaut

$$h(a) = a \ln\big(\frac{qa}{p(n-a)}\big) - n \ln\big(\frac{qn}{n-a}\big)$$

2. a) On a immédiatement :

$$L_X(t) = \sum_{k=1}^{n} p_k.\mathrm{e}^{tk}$$

Donc

$$L'_X(t) = \sum_{k=1}^{n} k p_k.\mathrm{e}^{tk}, L''_X(t) = \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k.\mathrm{e}^{tk}$$

b) En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, avec :

$$\begin{cases} a_k = ke^{tk/2}\sqrt{p_k} \\ b_k = e^{tk/2}\sqrt{p_k} \end{cases}$$

$$L'_X(t)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} k^2 \mathrm{e}^{tk} p_k\Big) \times \Big(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tk} p_k\Big) = L''_X(t) L_X(t)$$

c) On a $I = \mathbb{R}$, en effet $\varphi(t) = \ln L_X(t)$ existe pour tout t réel, puisque $L_X(t) > 0$. Bien évidemment :

$$\varphi'(t) = \frac{L'_X(t)}{L_X(t)} > 0, \quad \varphi''(t) = \frac{L_X(t)L'' - X(t)}{L_X^2(t)} \geqslant 0$$

Puis $\psi'(t) = a - \varphi'(t)$, et :

$$\psi'(t) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (a-k) p_k . \mathrm{e}^{kt}}{L_X(t)}$$

Donc

- si $a \geqslant n$, la fonction ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $h(a) = +\infty$.
- si $a \leqslant 0$, la fonction ψ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et $h(a) = +\infty$.
- si $0 < a < n$, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\psi'(t_0) = 0$, ou $\varphi'(t_0) = a$. Les variations de φ' sont celles de ψ'. Donc φ' est une fonction continue, monotone et $(\varphi')^{-1}$ existe.

d) Enfin $h(a) = t_0 a - \varphi(t_0)$, avec $t_0 = (\varphi')^{-1}(a)$. Donc :

$$h(a) = a(\varphi')^{-1}(a) - \varphi\big((\varphi')^{-1}(a)\big)$$

Exercice 1.8.

1. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{\ln n}{n}$

2. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

3. Démontrer la proposition suivante :

$$\forall\, n \geqslant 3, \int_3^n \frac{\ln t}{t}\, dt + \frac{\ln 2}{2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_3^n \frac{\ln t}{t}\, dt + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}$$

et en déduire un équivalent simple de $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\ln k}{k}$

4. On se propose de démontrer l'existence d'un nombre réel c tel que :

$$\forall\, n \geqslant 2, S_n = \frac{1}{2}\ln^2(n) + c + \varepsilon(n), \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

a) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \ln^2(n) - \ln^2(n-1) = 2\dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{\ln n}{n^2} + o\big(\dfrac{\ln n}{n^2}\big)$.

b) On pose $u_n = \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{1}{2}\big(\ln^2 n - \ln^2(n-1)\big)$.

Montrer que $\sum\limits_{k=2}^{n} u_k = S_n - \dfrac{\ln^2(n)}{2}$

c) Conclure.

Solution :

1. La série $\sum \dfrac{\ln n}{n}$ diverge, car pour $n \geqslant 3$, $\dfrac{\ln n}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$ et la divergence de la série harmonique donne le résultat.

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle n'est pas prolongeable par continuité en 0, car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$. Par contre $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

La fonction f est donc croissante sur $]0, \mathrm{e}]$, puis décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. Elle admet un maximum en $x = \mathrm{e}$ qui vaut $1/\mathrm{e}$.

3. Pour tout $k \geqslant 3$, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[k, k+1]$. D'où :

$$\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \frac{\ln k}{k}$$

Pour tout $k \geqslant 4$,

$$\frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqslant \frac{\ln(k-1)}{k-1}$$

Donc

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$$

En sommant sur $k \in [\![4, n]\!]$, il vient :

$$\int_4^n f(x)\,dx \leqslant \int_4^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_3^n f(x)\,dx$$

ou

$$\int_4^n f(x)\,dx + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} \leqslant S_n \leqslant \int_3^n f(x)\,dx + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}$$

et par la première inégalité :

$$\int_3^n f(x)\,dx + \frac{\ln 2}{2} \leqslant S_n \leqslant \int_3^n f(x)\,dx + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}$$

Enfin

$$\int_3^n \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 n - \frac{1}{2}\ln^2(3)$$

Donc

$$S_n \sim \frac{\ln^2 n}{2}$$

4. a) En mettant n en facteur, il vient :

$$\ln^2 n - \ln^2(n-1) = \ln^2 n - \left(\ln n + \ln(1 - \frac{1}{n})\right)^2$$

$$= -2\ln n \ln\big(1-\frac{1}{n}\big) - \ln^2\big(1-\frac{1}{n}\big)$$

Or $\ln\big(1-\frac{1}{n}\big) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$. Après quelques calculs et le fait que $\frac{1}{n^2} = o\big(\frac{\ln n}{n^2}\big)$, on obtient :

$$\ln^2 n - \ln^2(n-1) = \frac{2\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + o\big(\frac{\ln n}{n^2}\big)$$

b) Résultat immédiat par « télescopage »

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = S_n - \frac{\ln^2 n}{2}$$

c) On écrit

$$u_n = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\Big(\frac{2\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + o\big(\frac{\ln n}{n^2}\big)\Big) = -\frac{\ln n}{2n^2} + o\big(\frac{\ln n}{n^2}\big)$$

Ainsi u_n est de signe constant et équivalent au terme général d'une série convergente, car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2}\frac{\ln n}{n^2} = 0$.

Notons $\sum\limits_{k=2}^{\infty} u_k = c$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n - \frac{\ln^2 n}{2} = c$ ou

$$S_n = \frac{\ln^2 n}{2} + c + \varepsilon(n),\ \text{avec}\ \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$$

Exercice 1.9.

Pour $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ on pose : $I_k(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^{k+\frac{1}{2}}}\, du$.

1. Montrer la convergence de l'intégrale $I_k(a)$.

2. a) Trouver une relation entre $I_{k+1}(a)$ et $I_k(a)$.

b) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_0(a) = I_{n+1}(a) + \sum_{k=0}^{n} (k - \frac{1}{2}) I_{k+1}(a) + \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a^{k+\frac{1}{2}}}$$

3. Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N},\ a^{k+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{a} I_{k+1}(a)$ tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$.

4. Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Exprimer $1 - \Phi(x)$ en fonction de $I_0(\frac{x^2}{2})$ pour $x \neq 0$.

5. En déduire un développement asymptotique de $1-\Phi(x)$ du type $P_n(\frac{1}{x})\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, où P_n est un polynôme de degré $2n+1$.

Solution :

1. Soit $a > 0$. La fonction $f_k : u \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u^{k+\frac{1}{2}}}$ est continue sur $[a, +\infty[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{u\to+\infty} u^2 f_k(u) = 0$$

Cela entraîne, par la règle de Riemann, que $I_k(a)$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. a) Une intégration par parties sur $[a, A]$, puis un passage à la limite quand A tend vers l'infini, donnent :

$$I_k(a) = \big(k + \frac{1}{2}\big)I_{k+1}(a) + \frac{\mathrm{e}^{-a}}{a^{k+\frac{1}{2}}}$$

b) En sommant ces égalités pour $k \in [\![0, n]\!]$, il vient :

$$I_0(a) = I_{n+1}(a) + \sum_{k=0}^{n} \big(k - \frac{1}{2}\big)I_{k+1}(a) + \mathrm{e}^{-a} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a^{k+\frac{1}{2}}}$$

3. On peut écrire :

$$0 \leqslant I_{k+1}(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^{k+\frac{1}{2}}}\, du \leqslant \mathrm{e}^{-a} \int_a^{+\infty} \frac{du}{u^{k+\frac{1}{2}}} = \frac{2.\mathrm{e}^{-a}}{(2k+3)a^{k+\frac{3}{2}}}$$

Donc :

$$0 \leqslant a^{k+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{a} I_{k+1}(a) \leqslant \frac{1}{a}$$

et

$$\lim_{a\to+\infty} a^{k+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{a} I_{k+1}(a) = 0$$

4. On sait que :

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^2/2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^{\frac{1}{2}}}\, du = \frac{I_0(x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$$

5. Or :

$$I_0(x^2/2) = I_{n+1}(x^2/2) + \sum_{k=0}^{n} \big(k - \frac{1}{2}\big)I_{k+1}(x^2/2) + \mathrm{e}^{-x^2/2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x^2/2)^{k+\frac{1}{2}}}$$

$$= R_n(x) + \mathrm{e}^{-x^2/2} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1/2}}{x^{2k+1}}$$

Posons $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} 2^{k+\frac{1}{2}} X^{2k+1}$. Ainsi P_n est un polynôme de degré $(2n+1)$ et :

$$I_0(x^2/2) = R_n(x) + P_n\big(\frac{1}{x}\big)\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

On sait, par la question 3, que, pour $k \geqslant 1$:

$$I_{k+1}\big(\frac{x^2}{2}\big) = o\big(\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(x^2/2)^{k+\frac{1}{2}}}\big) = o\big(\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(x^2/2)^{\frac{1}{2}}}\big)$$

Chaque terme de $R_n(x)$ est ainsi négligeable devant $\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(x^2/2)^{\frac{1}{2}}}$. Donc :

$$R_n(x) = o\big(\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(x^2/2)^{\frac{1}{2}}}\big), \text{ et } \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{(x^2/2)^{\frac{1}{2}}} \sim P_n\big(\frac{1}{x}\big)\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Finalement,

$$I_0(x^2/2) = R_n(x) + \mathrm{e}^{-x^2/2} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+\frac{1}{2}}}{x^{2k+1}}$$

donne :

$$I_0(x^2/2) \sim P_n\big(\frac{1}{x}\big)\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

et, au voisinage de $+\infty$:

$$1 - \Phi(x) \sim \mathrm{e}^{-x^2/2} \frac{P_n(\frac{1}{x})}{\sqrt{2\pi}}$$

Exercice 1.10.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par récurence sur n en posant :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\left[a - u_n^2\right]$$

1. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ lorsque $a < 0$?

2. Étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ lorsque $a = 0$ et lorsque $a = 4$.

3. Dans cette question, on suppose que $a \in \,]0, 4[$.

a) Montrer que $\frac{a}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout entier $n \geqslant 1$ (on pourra étudier l'image du segment $[a/2, 2]$ par la fonction f définie par $f(x) = x + \frac{1}{2}(a - x^2)$).

b) Prouver que pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \max\big(\frac{\sqrt{a}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{a}{4}\big)\,|u_n - \sqrt{a}|$$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente. Quelle est sa limite ?

4. Dans cette question on va raisonner par l'absurde pour prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est divergente lorsque $a > 4$. Dans un premier temps, on va donc supposer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite ℓ.

a) Quelle sont les valeurs possibles pour ℓ ?

b) En déduire que dans chacun des cas, il existe un entier n_0 tel que :

$$|u_{n+1} - \ell| \geqslant \frac{\sqrt{a}}{2}\,|u_n - \ell|$$

pour tout $n \geqslant n_0$. Obtenir une contradiction et conclure.

Solution :

1. Le scalaire a étant strictement négatif, il est immédiat que la suite (u_n) est décroissante.
Supposons qu'elle soit minorée. Dans ce cas elle converge vers le point fixe de l'application $x \mapsto x + \frac{1}{2}\big(a - x^2\big)$, point fixe ℓ qui vérifie l'équation $\ell^2 = a < 0$, ce qui est impossible.

La suite (u_n) diverge donc vers $-\infty$.

2. Si $a=0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n=0$ et si $a=4$, pour tout $n\geqslant 1, u_n=2$

3. a) Une étude rapide de la fonction $f : x\mapsto x+\dfrac{1}{2}\big(a-x^2\big)$ montre que

- f est croissante sur $]-\infty,1]$
- f est décroissante sur $]1,+\infty[$
- elle admet un *maximum* en $x=1$, qui vaut $\dfrac{a+1}{2}$.

La fonction f étant continue, l'image de tout segment de $\mathbb{R}$ est un segment. Aussi

- si $a\in\,]0,2]$, alors $0<\frac{a}{2}\leqslant 1$ et on montre que $f\big([\frac{a}{2},2]\big)\subset[\frac{a}{2},2]$,
- si $a\in\,]2,4]$, alors $\frac{a}{2}\geqslant 1$ et on montre que $f\big([\frac{a}{2},2]\big)=[f(2),f(\frac{a}{2})]\subset[0,2]$.

b) On remarque que :

$$|\sqrt{a}-u_{n+1}|=|\sqrt{a}-u_n|.\big|1-\frac{\sqrt{a}+u_n}{2}\big|$$

Or,

- comme $u_n\geqslant 1$ et $n\geqslant 1$

$$1-\frac{\sqrt{a}+u_n}{2}\leqslant 1-\frac{\sqrt{a}+a/2}{2}\leqslant \max\big(\frac{\sqrt{a}}{2},1-\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{a}{4}\big)$$

- comme $u_n\leqslant 2$

$$-\max\big(\frac{\sqrt{a}}{2},1-\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{a}{4}\big)\leqslant-\frac{\sqrt{a}}{2}\leqslant 1-\frac{\sqrt{a}+u_n}{2}$$

c) Soit $k=\max\big(\frac{\sqrt{a}}{2},1-\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{a}{4}\big)\in\,]0,1[$. Par la question précédente, il vient, pour tout $n\geqslant 1$:

$$|\sqrt{a}-u_n|\leqslant k^{n-1}\sqrt{a}$$

Il en résulte que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

4. La fonction f étant continue, les seules limites possibles sont les points fixes de f, soit $\ell=\pm\sqrt{a}$.

- si $\ell=\sqrt{a}$, on sait que

$$|\sqrt{a}-u_{n+1}|=|\sqrt{a}-u_n|\big|1-\frac{\sqrt{a}+u_n}{2}\big|$$

Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty}\big|1-\dfrac{\sqrt{a}+u_n}{2}\big|=\sqrt{a}-1>1$. Il existe donc $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant n_0$:

$$\big|1-\frac{\sqrt{a}+u_n}{2}\big|>\frac{\sqrt{a}}{2}>1$$

- si $\ell=-\sqrt{a}$, on sait que

$$|\sqrt{a}+u_{n+1}|=|\sqrt{a}+u_n|\big|1+\frac{\sqrt{a}-u_n}{2}\big|$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\big|1+\dfrac{\sqrt{a}-u_n}{2}\big| = 1+\sqrt{a} > \dfrac{\sqrt{a}}{2}$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\big|1-\frac{\sqrt{a}+u_n}{2}\big| > \frac{\sqrt{a}}{2} > 1$$

On obtient ainsi l'inégalité demandée.

b) Lorsque $a > 4$, la suite $(|u_n-\ell|)$ est coissante donc, pour tout $n \geqslant 1, |u_n-\ell| \geqslant |u_0-\ell| = \sqrt{a}$.

Elle ne peut converger vers $\sqrt{a}$ que si elle est constante, c'est-à-dire $u_n = \ell$, pour tout $n \geqslant 1$, ce qui n'est déjà pas vérifié pour u_1.

Exercice 1.11.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|t|}}\,dt & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est ainsi bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ est convergente et préciser sa valeur

(on pourra utiliser le changement de variable $t = \dfrac{u^2}{2}$)

b) En déduire un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

c) Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$, dont on précisera l'équation.

3. Montrer que la courbe représentative de f admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$.

Solution :

1. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|t|}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Au voisinage de 0, elle est équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$, dont l'intégrale est convergente sur tout intervalle $]-\varepsilon,\varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$.

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Si l'on écrit :

$$f(x) = x\int_0^1 g(t)\,dt + x\int_1^x g(t)\,dt = Cx + x\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|t|}}\,dt$$

on voit que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, puisque g est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \int_0^1 g(t)\,dt + xg(x) + \int_1^x g(t)\,dt = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|t|}}\,dt + \frac{x}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On a clairement $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et f est continue en 0, dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
Enfin

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \left(\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|t|}}\,dt + \frac{x}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{e}^{-x} \right) = 0$$

ce qui entraîne que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. a) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Au voisinage de 0, elle est équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$, qui est intégrable sur $[0, 1]$.

Pour tout $t \geqslant 1$, on a $|g(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Finalement, I existe.
Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $a > 0$.

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} 2.\mathrm{e}^{-u^2}\,du$$

En prenant la limite lorsque a tend vers 0, il vient $I = \sqrt{\pi}$.

b) Ainsi $f(x) \sim x\sqrt{\pi}$, au voisinage de $+\infty$.

c) On a

$$f(x) - x\sqrt{\pi} = x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

et, pour $x \geqslant 1$

$$|f(x) - x\sqrt{\pi}| \leqslant x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = x.\mathrm{e}^{-x}$$

Donc

$$\lim_{x\to +\infty} |f(x) - x\sqrt{\pi}| = 0$$

et la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = \sqrt{\pi}x$ comme asymptote en $+\infty$.

3. Pour tout $x < 0$, si $y = -x$

$$f(x) = x \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{-t}}\,dt = -x \int_0^{-x} \frac{\mathrm{e}^{u}}{\sqrt{u}}\,du = y \int_0^y \frac{\mathrm{e}^{u}}{\sqrt{u}}\,du$$

Or, pour $u > 0, e^u \geqslant 1$ et

$$f(x) \geqslant y \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2y^{3/2}$$

Cela entraîne que :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

Exercice 1.12.

Pour $a \in]-1,1[$, soit f_a la fonction définie sur $[0,\pi]$ par :

$$f_a(x) = 1 + a^2 - 2a\cos x$$

1. a) Montrer que $\forall a \in]-1,1[, \forall x \in [0,\pi], (1-|a|)^2 \leqslant f_a(x) \leqslant (1+|a|)^2$.

b) Montrer que $\forall a \in]-1,1[, \forall x \in [0,\pi], f_a(\pi - x) = f_{-a}(x)$.

c) Montrer que : $\forall a \in]-1,1[, \forall x \in [0,\pi], f_{a^2}(x) = f_a(\frac{x}{2})f_{-a}(\frac{x}{2})$.

2. On pose, pour $a \in]-1,1[$, $g(a) = \displaystyle\int_0^\pi \ln(f_a(x))\,dx$.

a) Montrer que g est une fonction paire.

b) Montrer que : $\forall a \in]-1,1[, g(a^2) = 2g(a)$.

c) Montrer que g est continue en 0.

d) En déduire que : $\forall a \in]-1,1[, g(a) = 0$.

Solution :

1. a) On peut évidemment démontrer les inégalités demandées en distinguant selon le signe de a et en développant. On peut aussi remarquer que :

$$f_a(x) = (1 - a.\mathrm{e}^{ix})(1 - a.\mathrm{e}^{-ix}) = |1 - a.\mathrm{e}^{ix}|^2$$

Or par l'inégalité du triangle :

$$1 - |a| = |1 - |a|| \leqslant |1 - ae^{ix}| \leqslant 1 + |a|$$

Il reste à élever au carré.

b) La relation demandée est évidente car $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

c) Ici encore, on peut faire un calcul trigonométrique direct, ou écrire :

$$\begin{aligned} P &= |1 - a.\mathrm{e}^{ix/2}|^2.|1 + a.\mathrm{e}^{ix/2}|^2 \\ &= (|1 - a.\mathrm{e}^{ix/2}||1 + a.\mathrm{e}^{ix/2}|)(|1 - a.\mathrm{e}^{-ix/2}||1 + a.\mathrm{e}^{-ix/2}|) \\ &= (1 - a^2\mathrm{e}^{ix})(1 - a^2\mathrm{e}^{-ix}) = |1 - a^2\mathrm{e}^{ix}|^2 \end{aligned}$$

2. a) Par la question précédente a), la fonction g est bien définie. On montre qu'elle est paire en utilisant la question b) et le changement de variable affine $u = \pi - x$ dans l'intégrale définissant g.

b) Question évidente, par ce qui précède et les propriétés du logarithme.

c) Par la question 1. a) : $\ln((1-|a|)^2) \leqslant \ln f_a(x) \leqslant \ln((1+|a|)^2)$. Donc :

$$\pi\ln((1-|a|)^2) \leqslant g_a(x) \leqslant \pi\ln((1+|a|)^2)$$

Il reste à prendre la limite lorsque a tend vers 0 pour conclure.

d) Comme $g(a^2) = 2g(a)$, une récurrence immédiate donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$g(a) = \frac{1}{2^n} g\big(a^{2^n}\big)$$

Or $|a| < 1 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} a^{2^n} = 0$. On conclut par la continuité de g en 0.

Exercice 1.13.

On note $I = \mathbb{R}_+^*$ et $C = C^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

On pose également :

$$L = \left\{ f \in C / \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge absolument } \right\} \text{ et}$$

$$E = \left\{ f \in C / \ \forall\, x \in I, \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x}\, dt \text{ converge absolument } \right\}.$$

Pour tout $f \in E$ et $x \in I$, on notera $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x}\, dt$.

1. a) Vérifier que E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.

b) A–t–on $E \subset L$? A–t–on $L \subset E$?

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f_α définie par $f_\alpha(t) = t^{\alpha - 1}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $f_\alpha \in E$.

Montrer qu'alors $\widehat{f_\alpha}$ est proportionnelle à f_α (on ne cherchera pas à calculer le coefficient de proportionnalité).

2. a) Soit $f \in L$ telle que $t \mapsto t f(t) \in L$. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x}\, dt - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t|f(t)|\, dt$$

Peut–on en déduire un équivalent de $\widehat{f}(x)$ lorsque x tend vers l'infini ?

b) Vérifier que pour tout $(x, t) \in I^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{t+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^k}{x^{k+1}} + (-1)^{n+1} \Big(\frac{t}{x}\Big)^{n+1} \frac{1}{t+x}$$

c) On suppose que $f \in L$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : t \mapsto t^k f(t) \in L$. Montrer que $\widehat{f}(x)$ admet un développement asymptotique à tout ordre lorsque $x \to +\infty$.

d) Qu'obtient–on pour $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$?

Solution :

1. a) E est un sous–espace vectoriel de C, puisque $|\lambda f + g| \leqslant |\lambda| . |f| + |g|$ et puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \in E$.

b) Pour tout $t \geqslant 0$, $\Big|\dfrac{f(t)}{t+x}\Big| \leqslant \dfrac{1}{x}\, |f(t)|$.

Donc $L \subset E$. Par contre $t \mapsto \dfrac{1}{t+1}$ est élément de E sans être élément de L. L'inclusion précédente est donc stricte.

c) La fonction f_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Au voisinage de 0, on a $f_\alpha(t) \sim \dfrac{t^{\alpha-1}}{x}$. Cette dernière fonction, positive, admet une intégrale convergente sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $f_\alpha(t) \sim t^{\alpha-2}$. Cette dernière fonction, positive, admet une intégrale convergente sur $[1,+\infty]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Ainsi $f_\alpha \in E$ si et seulement si $0 < \alpha < 1$.

Le changement variable linéaire $t = xu, (x > 0)$ donne :

$$\widehat{f_\alpha}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+x}\,dt = x^{\alpha-1}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,du = f_\alpha(x)\widehat{f_\alpha}(1)$$

2. a) On peut écrire :

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+x}\,dt - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt\Big| &= \Big|\int_0^{+\infty} \frac{-t}{x(t+x)}\,f(t)\,dt\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} t|f(t)|\,dt = o\big(\frac{1}{x}\big)\end{aligned}$$

Donc, si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \neq 0$, $\widehat{f}(x) \sim \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

b) Pour $t > 0, x > 0$, il vient (série géométrique) :

$$\frac{1}{t+x} = \frac{1}{x}\times\frac{1}{1+\frac{t}{x}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^k}{x^{k+1}} + (-1)^{n+1}\big(\frac{t}{x}\big)^{n+1}\times\frac{1}{t+x}.$$

c) Comme $f \in L \subset E$, on sait que $\widehat{f}$ existe. De plus

$$\widehat{f}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}\int_0^{+\infty} t^k f(t)\,dt + R_n(x)$$

avec

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^{+\infty} t^{n+1}|f(t)|\,dt = o\big(\frac{1}{x^n}\big)$$

Ceci donne le développement asymptotique dans les puissances de $\dfrac{1}{x}$ de $\widehat{f}(x)$ à l'ordre n.

d) Lorsque $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ (qui appartient à L), pour tout $n \in \mathbb{N}, t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t} \in L$, et on a :

$$\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,dt = \Gamma(k+1) = k!$$

Donc, pour tout $n \geqslant 0$

$$\widehat{f}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + o\big(\frac{1}{x^n}\big)$$

Exercice 1.14.

Soit k un entier naturel tel que $k \geqslant 2$.

A toute liste $(p_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}$ de nombres réels positifs ou nuls telle que $\sum_{i=0}^{k} p_i = 1$, avec $p_0 \neq 1$, on associe le polynôme :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{k} p_i X^i$$

1. Montrer que la fonction polynôme P réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[p_0, 1]$.

2. On note E l'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = x$ sur le segment $[0,1]$.

a) Montrer que E est non vide.

b) En discutant selon la valeur de $P'(1)$, déterminer le nombre de solutions de cette équation.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = P(0)$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = P(u_n)$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) A quelle condition a-t-on $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$?

Solution :

1. On a $P'(x) = \sum_{i=1}^{k} i p_i x^{i-1}$ et comme $p_0 \neq 1$, l'un au moins des p_i est strictement positif et pour $x > 0$, on a $P'(x) > 0$. La fonction polynôme P est une fonction continue strictement croissante de $[0,1]$ sur $[P(0), P(1)] = [p_0, 1]$.

2. a) E n'est pas vide, puisque $P(1) = 1$.

b) Soit $f : x \mapsto P(x) - x$. La fonction f est de classe C^∞ et pour $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = P'(x) - 1, \quad f''(x) = P''(x) \geqslant 0$$

Sur $[0,1]$, la fonction f' est croissante de $p_1 - 1 \leqslant 0$ à $P'(1) - 1$. Donc

• si $P'(1) - 1 \leqslant 0$, la fonction f' reste négative sur $[0,1]$ et f est décroissante de p_0 vers 0 et est donc positive sur $[0,1]$. L'unique solution de l'équation $P(x) = x$ est donc $x = 1$.

• si $P'(1) - 1 > 0$, la fonction f' s'annule en $\alpha \in]0,1[$ et f est décroissante sur $[0,\alpha]$ de p_0 vers $f(\alpha)$ puis croissante sur $[\alpha, 1]$ vers 0. Donc $f(\alpha) < 0$, et comme $p_0 \geqslant 0$, il existe $a \in [0,\alpha]$ tel que $f(a) = 0$. Ainsi l'équation $P(x) = x$ admet deux solutions sur $[0,1]$, qui sont a et 1.

3. a) Par une récurrence immédiate, $u_n \in [0,1]$, pour tout $n \geqslant 0$ et par la question précédente on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$.

• si $P'(1) - 1 \leqslant 0$, $f(u_n) \geqslant 0$; la suite (u_n) est croissante majorée : elle converge vers le seul point fixe de P qui est 1.

• si $P'(1) - 1 > 0$, comme $u_0 \in [0, a]$, la fonction P étant croissante de $[0, a]$ sur $[p_0, a] \subset [0, a]$, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in [0, a]$ et $f(u_n) \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante, majorée par a, elle converge vers l'unique point fixe de P de $[0, a]$ qui est a.

b) D'après la question précédente, la suite (u_n) tend vers 1 si et seulement si $P'(1) \leqslant 1$.

Exercice 1.15.

On note E l'ensemble constitué des fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$,
ii) Il existe au moins un réel x tel que $f(x) < 1$.

1. a) Déterminer un élément de E non identiquement nul.

b) Soit a un réel non nul, et $f \in E$. On définit g par $g(x) = f(ax)$. Montrer que g est élément de E.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que f est un élément non nul de E.

2. a) Calculer $f(0)$

b) Comparer pour tout x réel les valeurs $f(x)$ et $f(-x)$.

c) Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x/2)$.

d) Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) + 1 \geqslant 0$.

3. On suppose dans cette question que f est un élément de E qui ne s'annule jamais (*i.e.* $f(x) \neq 0$, pour tout x réel).

a) Étudier le signe de f.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < 1$.
On définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(2^n a)$. Montrer que cette suite est convergente. Déterminer sa limite.

c) La fonction f admet–elle une limite lorsque x tend vers $+\infty$?

Solution :

1. a) La fonction $x \mapsto \cos x$ vérifie les deux conditions de l'énoncé.

b) Il vient :

$$g(x + y) + g(x - y) = f(ax + ay) + f(ax - ay) = 2f(ax)f(ay) = 2g(x)g(y)$$

De plus, si $f(x_0) < 1$, alors $g(x_0/a) = f(x_0) < 1$, donc $g \in E$.

2. a) En prenant $x = y = 0$ dans la relation i), il vient $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Supposons que $f(0) = 0$. En prenant $y = 0$, il vient $2f(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est identiquement nulle, ce qui est exclu. Ainsi $f(0) = 1$.

b) En prenant $x = 0$, il vient, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) + f(-y) = 2f(y)$. Ainsi $f(y) = f(-y)$ et f est paire.

c) En penant $x = y$, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) + 1 = 2f(x)^2$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$$

d) Immédiatement $f(x) + 1 \geqslant 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 1$, elle est donc positive sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < 1$. Le relation 2. c) donne, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = 2u_{n-1}^2 - 1$$

Cette relation de récurrence est de la forme $u_n = \varphi(u_{n-1})$, avec $\varphi(x) = 2x^2 - 1$. Comme $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et que $u_0 > 0$, il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. De plus la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$; cela entraîne que la suite (u_n) est monotone.

Enfin, $u_0 < 1$ et si on suppose $u_n \leqslant 1$, $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1 \leqslant 2{\times}1 - 1 \leqslant 1$.
En résumé :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leqslant 1$ et la suite (u_n) est monotone

Qu'elle soit croissante ou décroissante, on peut conclure qu'elle converge vers ℓ tel que $\ell = 2\ell^2 - 1$, soit $\ell \in \{1, -1/2\}$. Donc la suite (u_n) tend vers 1.

c) Supposons que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lambda$. En appliquant la relation i) avec $y = a$, et en passant à la limite lorsque x tend vers l'infini, il vient

$$2\lambda = 2\lambda f(a)$$

Comme $f(a) < 1$, cela entraîne que $\lambda = 0$. Mais $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ entraîne que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, en contradiction avec le résultat de la question précédente. Ainsi f n'a pas de limite en l'infini.

Exercice 1.16.

Si (u_n) est une suite réelle, on note $\prod\limits_{k=1}^{n} u_k$ le produit $u_1{\times}u_2{\times}\ldots{\times}u_n$.

Pour tout a réel et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$P_n(a) = \prod_{k=1}^{n}(1 + a^{2^k}), \quad U_n(a) = \frac{a^{2^n}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1 + a^{2^k})}$$

1. Discuter, en fonction du paramètre a, l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(a)$.

2. Discuter, en fonction du paramètre a, l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(a)$.

3. Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} U_n(a)$ (on pourra écrire $a^{2^n} = a^{2^n}+1-1$).

4. a) Étudier la convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} U_n(a)\,da$.

b) Étudier la convergence, et calculer éventuellement la somme, de la série de terme général I_n.

5. a) Montrer que $P_n(a) = \sum\limits_{p=0}^{2^n-1} a^{2p}$. Retrouver ainsi les résultats de la question 1.

b) En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(a)$ lorsqu'elle converge.

Solution :

1. On sait que $P_n(a) > 0$. En prenant le logarithme : $\ln P_n(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+a^{2^k})$.

- Si $|a| < 1$, $\ln(1+a^{2^k}) \sim a^{2^k}$ et la série $\sum a^{2^k}$ converge. Donc la suite $(P_n(a))$ admet une limite dans $\mathbb{R}$.
- Si $|a| = 1$, $\ln(1+a^{2^k}) = \ln 2$ et la série $\sum \ln(1+a^{2^k})$ diverge vers $+\infty$. Donc la suite $(P_n(a))$ tend vers $+\infty$.
- Si $|a| > 1$, $\ln(1+a^{2^k}) \sim 2^k \ln|a|$ et la série $\sum \ln(1+a^{2^k})$ diverge vers $+\infty$. Donc la suite $(P_n(a))$ tend vers $+\infty$.

2. On a $U_n(a) = \dfrac{a^{2^n}}{P_n(a)}$. Donc :

- Si $|a| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(a) = 0$.
- Si $|a| = 1$, $U_n(a) = \dfrac{1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $|a| > 1$, $U_n(a) \leqslant \dfrac{1}{P_{n-1}(a)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. On a : $U_n(a) = \dfrac{1}{P_{n-1}(a)} - \dfrac{1}{P_n(a)}$, et :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} U_k(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{P_n(a)}$$

Ainsi :

- Si $|a| < 1$, $\lim P_n(a) = \ell(a)$ et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k(a) = 1 - \dfrac{1}{\ell(a)}$.

• Si $|a| \geqslant 1$, $\lim P_n(a) = +\infty$ et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k(a) = 1$.

4. a) Si $n = 1$, $U_1(a) = \dfrac{a^2}{1+a^2}$ n'a pas d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$. Pour tout $n \geqslant 2$, l'encadrement

$$0 \leqslant U_n(a) \leqslant \frac{1}{1+a^2} \times \frac{a^{2^n}}{1+a^{2^n}} \leqslant \frac{1}{1+a^2}$$

montre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} U_n(a)\, da$ existe.

b) Pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \int_1^{+\infty} U_k(a)\, da = \int_1^{+\infty} \sum_{k=2}^{n} U_k(a) da = \int_1^{+\infty} \frac{1}{P_1(a)}\, da - \int_1^{+\infty} \frac{1}{P_n(a)}\, da$$

Or

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{da}{P_n(a)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{da}{a^{2^n}} = \frac{1}{2^n - 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc

$$\sum_{k=2}^{\infty} I_k = \int_1^{+\infty} \frac{da}{1+a^2} = \frac{\pi}{4}$$

5. a) On procède par récurrence sur n :
• pour $n = 1$, $P_1(a) = 1 + a^2$,
• supposons que $P_n(a) = \sum\limits_{p=0}^{2^n-1} a^{2p}$. Alors :

$$P_{n+1}(a) = P_n(a)(1 + a^{2^{n+1}}) = \sum_{p=0}^{2^n-1} a^{2p} + \sum_{p=0}^{2^{n-1}} a^{2(p+2^n)} = \sum_{p=0}^{2^{n+1}-1} a^{2p}$$

D'où le résultat au rang $n+1$ et la conclusion.

b) On a donc

$$P_n(a) = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a^2}$$

et si $|a| < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(a) = \frac{1}{1-a^2}$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_n(a) = 1 - (1 - a^2) = a^2$$

Exercice 1.17.

On considère la fonction $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par la relation $f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{x^2 - 1}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = -\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 x^{2k} \ln x\, dx + \int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx,$$

après avoir justifié, s'il y a lieu, la convergence des intégrales généralisées qui sont mises en jeu dans cette relation.

2. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 x^{2k} \ln x \, dx$.

3. Montrer que la suite $\displaystyle\left(\int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4. En déduire que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ est égale à la somme d'une série numérique (à préciser).

6. *On admet que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

Solution :

1. $\star$ La fonction f est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité à droite en 0 et à gauche en 1.
Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{2n} f(x)$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité à droite en 0 et à gauche en 1.
Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi : x \mapsto x^{2k} \ln x$, est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité à droite en 0.
Aucune intégrale généralisée (à improprement parler) n'est par conséquent mise en jeu dans la relation à établir.

$\star$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{2k-2} = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} x^{2k} \ln x = (x^{2n}-1) f(x).$$

Il s'ensuit, par linéarité de l'intégrale, que :

$$\int_0^1 f(x)\, dx = -\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 x^{2k} \ln x \, dx + \int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 x^{2k} \ln x \, dx = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \ln x\right]_t^1 - \frac{1}{2k+1}\int_0^1 x^{2k}\, dx = -\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

3. Notons $\hat{f}$ le prolongement par continuité de f sur $[0,1]$. La fonction $\hat{f}$ étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée. Soit K un majorant de $|\hat{f}|$: pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx\right| &= \left|\int_0^1 x^{2n} \hat{f}(x)\, dx\right| \leqslant \int_0^1 x^{2n} |\hat{f}(x)|\, dx \leqslant K \int_0^1 x^{2n}\, dx \\ &\leqslant \frac{K}{2n+1}\end{aligned}$$

On conclut d'après le théorème de l'encadrement, que la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4. En faisant tendre n vers $+\infty$ on conclut que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$ converge et que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

5. Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, Q_n et S_n les sommes partielles d'ordre n respectives des séries (convergentes) $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k^2}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_{2n+1} = 1 + S_n + \frac{1}{4}\, Q_n$. En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \big(1 - \tfrac{1}{4}\big)\frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Exercice 1.18.

Soit f une fonction continue strictement positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.

1. Montrer que F_a est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On suppose dorénavant que l'intégrale de f diverge en $+\infty$.

2. a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe un unique réel noté $\varphi(a)$ tel que :

$$\int_a^{\varphi(a)} f(t)\, dt = 1.$$

b) Exprimer la fonction φ en fonction d'une primitive de f. En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. a) Montrer que $\varphi(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $y = x$ est asymptote au graphe de φ.

b) On suppose que f est une fonction paire. Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est un axe de symétrie du graphe de φ.

4. On pose $f(x) = \exp(x^2)$. Montrer que f vérifie les hypothèses de l'introduction. Préciser l'asymptote et l'axe de symétrie du graphe de φ et représenter graphiquement cette fonction.

Solution :

1. F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ comme primitive d'une fonction continue et $F'_a = f$ est continue donc F_a est de classe $\mathcal{C}^1$. La dérivée vérifie $F'_a(x) = f(x) > 0$ donc F_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) Comme l'intégrale de f diverge en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_a(x) = +\infty$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à F_a, il existe un unique réel $\varphi(a)$ tel que $\displaystyle\int_a^{\varphi(a)} f(t)\,dt = 1$.

b) Notons $F = F_0$. On a pour tout $a \in \mathbb{R}$, $F(\varphi(a)) - F(a) = 1$. Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée strictement positive, F^{-1} existe et est de classe $\mathcal{C}^1$.

On a alors $\varphi(a) = F^{-1}(F(a)+1)$. Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

3. a) Comme f est positive et que $\displaystyle\int_x^{\varphi(x)} f(t)\,dt = 1$, il est clair que $\varphi(x) > x$.

Soit $A > 0$ et $M > 0$ tels que pour $x \geqslant M$, $f(x) \geqslant A$. Alors pour $a \geqslant M$, on a :

$$1 = \int_a^{\varphi(a)} f(t)\,dt = 1 \geqslant \int_a^{\varphi(a)} M\,dt = M(\varphi(a) - a).$$

On a donc $\varphi(a) - a \leqslant \dfrac{1}{M}$. Ceci montre que $\lim\limits_{x\to+\infty}(\varphi(x) - x) = 0$ et que la droite d'équation $y = x$ est asymptote au graphe de f.

b) Soit $a \geqslant 0$. On a $\displaystyle\int_a^{\varphi(a)} f(t)\,dt = 1$. Par parité, on a $\displaystyle\int_{-\varphi(a)}^{-a} f(t)\,dt = 1$, donc $\varphi(-\varphi(a)) = -a$. Or les points $(a, \varphi(a))$ et $(-\varphi(a), -a)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = -x$, d'où le résultat.

4. Il est clair que $f : x \mapsto \exp(t^2)$ vérifie les hypothèses du 1. De plus c'est une fonction paire, son intégrale diverge en $+\infty$ et elle tend vers $+\infty$. Cette fonction est donc strictement croissante et admet $y = -x$ comme axe de symétrie.

Exercice 1.19.

On se donne une suite $(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{N}^*$ et on pose $\varphi(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha(k)$.

On appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.

1. Montrer que φ est une injection croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

On pose dans toute la suite et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = \alpha(n)u_{\varphi(n)}$, $w_0 = \sum\limits_{k=0}^{\varphi(0)} u_k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sum\limits_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k$

2. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.

3. Montrer que si $\sum u_n$ converge, il en est de même pour $\sum v_n$.

4. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le rapport $\dfrac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)}$ soit inférieur ou égal à M.
Montrer que si $\sum v_n$ converge il en est de même pour $\sum u_n$.

5. On pose $\alpha(n) = 2^n$ et $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\sum u_n$ converge $\Longleftrightarrow \beta > 1$.

6. On pose $\alpha(n) = (n!)^n$ et $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$.
  a) Montrer que $((\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$
  b) Montrer que $\big(\ln(\alpha(n))\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équivalente à $(n^2 \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
  c) Etudier la convergence de $\sum v_n$. Conclusion ?

Solution :

1. $\varphi(n+1) - \varphi(n) = \alpha(n+1) > 0$ donc φ est strictement croissante donc injective.

2. Notons respectivement U_n et W_n les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum w_n$. Alors $W_n = U_{\varphi(n)}$. Si (U_n) converge la suite extraite (W_n) converge donc $\sum w_n$ converge.

Inversement si $\sum w_n$ converge alors $U_{\varphi(n)} = W_n \leqslant W$ où $W = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$. Comme la suite (U_n) est croissante et qu'une sous-suite converge, elle converge.

3. Comme la suite (u_n) est décroissante, on a :
$$w_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k \geqslant \alpha(n) u_{\varphi(n)} = v_n.$$
Comme $\sum w_n$ converge, $\sum v_n$ converge.

4. Par un calcul analogue, on obtient :
$$w_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k \leqslant \alpha(n) u_{\varphi(n-1)} \leqslant \frac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)} v_{n-1} \leqslant M v_{n-1}.$$
La convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum w_n$ et donc celle de $\sum u_n$.

5. On a $v_n = 2^n \dfrac{1}{2^n [\ln(2^n)]^\beta} = \dfrac{1}{n^\beta [\ln 2]^\beta}$.
Par la règle de Riemann, cette série converge si et seulement si $\beta > 1$.

6. a) Pour $k < n$, on a $(k!)^k \leqslant ((n-1)!)^{n-1}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k!)^k \leqslant n((n-1)!)^{n-1} \leqslant (n!)^{n-1} = \frac{1}{n!}(n!)^n = o\big((n!)^n\big).$$

Donc

$$\varphi(n) = (n!)^n + o\big((n!)^n\big) \sim (n!)^n.$$

b) Comme $\varphi(n)$ tend vers $+\infty$, on a :

$$\ln(\varphi(n)) \sim \ln(\alpha(n)) \text{ soit } n^2 \ln n \sim \ln(\alpha(n)).$$

c) Par le 5., $\sum u_n$ diverge.

Par ailleurs, $v_n = \dfrac{\alpha(n)}{\varphi(n)\ln(\varphi(n)} \sim \dfrac{1}{\ln(\alpha(n))} \sim \dfrac{1}{n^2 \ln n}$ donc $\sum v_n$ diverge.

Ainsi la réciproque du 3. n'est pas toujours vérifiée.

Exercice 1.20.

On définit les deux fonctions :

$\varphi : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi], t \mapsto \varphi(t) = t - \sin t\,;$

$\psi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, t \mapsto \psi(t) = 1 - \cos t.$

1. a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[0, 2\pi]$ dans $[0, 2\pi]$. En déduire que sa fonction réciproque φ^{-1} est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$.

On pose $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$.

b) Montrer que f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$.

c) Dresser le tableau de variation de f. Montrer que la droite d'équation $x = \pi$ est axe de symétrie de la représentation graphique de f. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.

d) Représenter graphiquement f.

2. a) Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, où f désigne la fonction définie au 1.

b) On pose $g(x) = \dfrac{1}{3\pi} f(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$ et $g(x) = 0$ sinon.

Montrer que g est une densité de probabilité.
Calculer l'espérance d'une variable aléatoire de densité g.

Solution :

1. a) On a $\varphi'(t) = 1 - \cos t$ pour $x \in [0, 2\pi]$. De plus φ' est continue, donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Comme $1 - \cos t > 0$ pour $t \in]0, 2\pi[$ et que φ continue à droite en 0 et à gauche en π, elle est strictement croissante sur $[0, 2\pi]$.

On en déduit que sa fonction réciproque φ^{-1} est continue sur $[\varphi(0), \varphi(2\pi)] = [0, 2\pi]$. Elle est dérivable sur $]0, 2\pi[$, car φ' ne s'annule pas sur cet intervalle.

b) Par composition, f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$.

c) On a pour $x \in]0, 2\pi[$, $f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x))\varphi'(x) = \sin(\varphi^{-1}(x))(1-\cos x)$. Comme $\varphi^{-1}(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0, \pi]$ et $\varphi^{-1}(x) \leqslant 0$ pour $x \in [\pi, 2\pi]$ et que $1 - \cos x \geqslant 0$ sur $]0, 2\pi[$, $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement qi $x \in [0, \pi]$.

De plus $f(2\pi - x) = f(x)$ donc la droite d'équation $x = \pi$ est axe de symétrie du graphe.

On a $f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \dfrac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$

On a $\dfrac{\psi'(u)}{\varphi'(u)} = \dfrac{\sin u}{1 - \cos u} \underset{(0)}{\sim} \dfrac{2}{u}$ qui tend vers $+\infty$ quand u tend vers 0.

Or $\lim\limits_{x\to 0} \varphi^{-1}(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.

On en déduit que le graphe de f admet une tangente verticale en 0.

d) La représentation graphique est maintenant sans difficulté (la courbe obtenue s'appelle une « arche de cyclode »).

2. a) En effectuant le changement de variable $x = \varphi(t)$, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \psi(t)\varphi'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\,dt = 3\pi.$$

b) La fonction g est continue positive sur $\mathbb{R}$ et on a clairement

$$\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1.$$

On obtient ainsi une densité de probabilité dite cyclodique.

Avec le même changement de variable qu'au 2. a) on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{2\pi} xg(x)\,dx = \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\psi(t)\varphi'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2\,dt \end{aligned}$$

En enlevant les termes dont l'intégrale est clairement nulle pour des questions de périodicité, on obtient :

$$E(X) = \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} (t - 2t\cos t + t\cos^2 t)\,dt = 1.$$