Soit f une fonction définie, continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$.

On considère une variable aléatoire réelle X de densité φ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ f(x) & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

On suppose que X admet une espérance $E(X)$. On note F la fonction de répartition de X et on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ Q(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x tf(t)dt$$

1. On étudie dans cette question le cas particulier où X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Déterminer F et Q.

b) Déterminer une application C de $[0,1]$ dans lui–même telle que $Q = C \circ F$.

c) Dresser le tableau de variations de C. Déterminer un réel t_0 tel que $C'(t_0) = 1$, puis un réel x_0 tel que $F(x_0) = t_0$.

2. On revient maintenant au cas général.

a) Montrer que Q est définie sur $\mathbb{R}^+$.
Déterminer une application C de $[0,1]$ dans lui–même telle que $Q = C \circ F$.
Dresser le tableau de variations de C. Déterminer un réel t_0 tel que $C'(t_0) = 1$, puis un réel x_0 tel que $F(x_0) = t_0$.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 C(x)dx = \int_0^{+\infty} Q(x)f(x)dx$.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé et suivant la loi uniforme sur $A_n = \{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

2. Déterminer la fonction de répartition F de $|S|$ (valeur absolue de S).

La suite de l'exercice consiste à donner une expression intégrale de F. Pour cela, on notera N_k le nombre de couples $(x, y) \in A_n^2$ tels que $x + y = k$.

3.a) Exprimer en fonction de N_k le coefficient de z^k dans le développement de :

$$\left(\frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots + z^n\right)^2$$

b) On pose $z = e^{it}$, $t \in [-\pi; \pi[$. Pour $t \neq 0$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} z^k$ sous la forme $\dfrac{\sin(p_n t/2)}{\sin t/2}$, où p_n est un entier que l'on déterminera en fonction de n. Que trouve-t-on pour $t = 0$?

4. On admettra que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ \int_a^b e^{i\alpha t} dt = \frac{1}{i\alpha}\left(e^{i\alpha b} - e^{i\alpha a}\right)$$

Montrer que :

$$\forall k \in A_n,\ N_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\sum_{p=-2n}^{2n} N_p e^{ipt}\right) e^{-ikt} dt$$

5. a) Pour $k \in \{0, \ldots, 2n\}$, on appelle M_k le nombre de couples $(x, y) \in A_n^2$ tels que $-k \leq x + y \leq k$.
Etablir la formule :

$$M_k = c \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2((2n+1)u) \sin(2k+1)u}{\sin^3 u} du$$

où c est une constante à déterminer.

b) En déduire une expression de $F(k)$ sous forme intégrale.

Une urne contient b boules blanches, n boules noires, r boules rouges ; b et n sont des entiers naturels non nuls, r est un entier naturel.
Un joueur tire une boule. Si elle est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage (avant le second tirage, l'urne contient donc $r-1$ boules rouges).
Dans ce cas, si la boule est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage, etc.
La partie s'achève lorsque le joueur a gagné ou perdu.

1. On note B_i (resp N_i, R_i) l'événement : «le joueur tire une boule blanche (resp une boule noire, une boule rouge) au i-ème coup.»

On note G_r l'événement : «le joueur gagne en commenant ses tirages dans une urne contenant r boules rouges».

a) Calculer les probabilités $p(G_0)$ et $p(G_1)$.

b) Trouver une relation entre $p(G_r)$ et $p(G_{r-1})$.

c) Calculer $p(G_r)$.

2. Soit X_r la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie s'achève, l'urne contenant au départ r boules rouges.

a) Calculer les espérances $E(X_0),\ E(X_1),\ E(X_2)$.

b) Trouver une relation entre $p(X_r = k)$ et $p(X_{r-1} = k-1)$ (pour $r \geq 1$ et $k \geq 2$), puis entre $E(X_r)$ et $E(X_{r-1})$.

c) En déduire $E(X_r)$.

On suppose que l'on sait tirer des nombres aléatoires uniformément répartis sur l'intervalle $[0, 1]$, c'est-à-dire que l'on a une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Donner une méthode de tirage de nombres aléatoires répartis suivant une loi de probabilité $(p_n)_n$ donnée, c'est-à-dire montrer comment définir une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, P(Y = n) = p_n$ (on pourra penser à définir la fonction de répartition de Y).

Dans cet exercice, on admettra les propriétés suivantes :

- soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes de sommes respectives U et V. La série de terme général $w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$ (série produit) est convergente et a pour somme $W = UV$.
- si de plus, la série de terme général $w_n t^n$ est convergente pour tout $t \in [0, 1[$, alors la fonction $t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} w_n t^n$ est deux fois dérivable sur cet intervalle, les fonctions dérivées seconde et première étant obtenues en dérivant terme à terme la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} w_n t^n$.

On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie donnant pile (P) avec la probabilité α et face (F) avec la probabilité $\beta = 1-\alpha$. ($\alpha \in]0, 1[$).

On s'intéresse à l'apparition de deux piles consécutifs. On note S_k l'événement « deux piles consécutifs sont apparus au $(k-1)$-ième et au k-ième tirage. »

Chaque pile ne peut servir qu'à une seule série de deux piles consécutifs.

Ainsi, dans la succession F P F P P P P, seuls sont réalisés les événements S_5 et S_7 et non S_6.

On note G_k l'événement « deux piles consécutifs sont apparus pour la première fois au $(k-1)$-ième et au k-ième tirage. »

1. On pose $a_k = p(S_k)$ (probabilité de l'événement S_k). Soit P_k l'événement « on obtient pile au k-ième tirage. » En écrivant que $P_{k-1} \cap P_k \subset S_{k-1} \cup S_k$, montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $\alpha^2 = a_k + \alpha\, a_{k-1}$.
En déduire la valeur de a_k pour tout $k \geqslant 2$.

2. On pose $b_k = p(G_k)$ (probabilité de l'événement G_k) et $b_0 = b_1 = a_0 = a_1 = 0$.

Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $a_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

3. Montrer que la série de terme général $a_k t^k$ est convergente pour tout t de $[0, 1[$ et calculer sa somme $F(t)$.
Montrer de même que la série de terme général $b_k t^k$ est convergente et exprimer sa somme H en fonction de F. Expliciter $H(t)$ pour $t \in [0, 1[$

4. Montrer que H admet une limite lorsque t tend vers 1^-.
Montrer que la suite $(b_k)_{k\geq 0}$ permet de définir la loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. En admettant que $H(1) = \lim\limits_{t \to 1^-} H(t)$, que $H'(1) = \lim\limits_{t \to 1^-} H'(t)$ et que $H''(1) = \lim\limits_{t \to 1^-} H''(t)$, montrer que X admet une espérance et une variance.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \exp(t - e^t)$.

1. a) Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

b) Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.

2. Montrer que X admet des moments de tous ordres et que le moment d'ordre k est donné par la formule $m_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(u))^k e^{-u} du$.

3. a) Soit u un réel srictement positif. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n$.

b) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_k = \int_0^n \ln(u) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^k du.$$

En écrivant $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^k$ sous la forme $\left(1 - \frac{u}{n}\right)\left(1 - \frac{u}{n}\right)^{k-1}$, vérifier la relation :

$$I_k = I_{k-1} + \int_0^n (u \ln(u)) \left(-\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{k-1} du$$

c) On pose $J_k = (k+1)I_k$. Trouver une relation de récurrence entre J_k et J_{k-1}. (On pourra faire une intégration par parties).
En déduire J_k pour tout entier $k \leqslant n$, puis I_n.

d) On rappelle que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est convergente. On appelle γ sa limite.
En admettant que $m_1 = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \ln(u) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n$, montrer que $E(X) = -\gamma$

NB : La loi suivie par X est appelée loi de Gumbel.

1. Une urne contient des boules noires et des boules blanches dans les proportions p et $q = 1 - p$ respectivement, avec $p \in]0, 1[$.
On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise dans cette urne. Soit (n_1, n_2) un couple d'entiers tels que $n_1 + n_2 = n$.
Quelle est la probabilité d'obtenir n_1 boules blanches (et donc n_2 boules noires) ?

Soit $F(p)$ cette probabilité. Pour quelle(s) valeur(s) de p cette probabilité est-elle maximale ? On pourra poser $H(p) = \ln(F(p))$.

2. On effectue dans cette question n tirages successifs d'une boule avec remise dans une urne contenant des boules indiscernables au toucher de k couleurs différentes.
Pour $i \in \{1, \cdots, k\}$, la proportion initiale de boules de couleur i dans l'urne est p_i où $p_i \in]0, 1[$. (avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$).

Soit $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ un k-uplet d'entiers strictement positifs dont la somme est égale à n.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir la répartition $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ en n tirages ? (c'est-à-dire n_1 boules de couleur 1, n_2 de couleur 2, etc.)
On notera $F(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ cette probabilité.

b) On cherche s'il existe des valeurs du k-uplet $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ pour lesquelles cette probabilité est maximale.
On pose $H = \ln(F)$. Déterminer un point candidat à l'optimisation de H sous la contrainte $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

c) Si au moins l'un des nombres $p_1, \ldots, p_k$ est nul, on pose $F(p_1, \ldots, p_k) = 0$.
Montrer que la fonction F ainsi prolongée sur $[0, 1]^k \cap \{\sum_{i=1}^{k} p_i = 1\}$ admet un maximum et que ce maximum est obtenu en un point de l'ouvert $]0, 1[^k$.

d) Conclure.

Soit λ un réel strictement positif. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ la variable X_i suit la loi exponentielle de paramètre $i\lambda$.

On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et f_n la densité de S_n nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ et continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. a) Déterminer f_2.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \geqslant 0$, $f_n(x) = n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}$

c) Que vaut l'espérance $E(S_n)$ de S_n ? Donner un équivalent de cette espérance quand n tend vers l'infini.

d) Calculer la variance de S_n et montrer qu'elle admet une limite finie quand n tend vers l'infini.

2. a) Déterminer la fonction de répartition F_n de S_n.

b) On pose $T_n = \dfrac{S_n}{n}$. Déterminer la fonction de répartition H_n de T_n.

c) Etudier pour tout x réel la limite de la suite $(H_n(x))_n$.
Quelle est la limite en loi de la suite (T_n) ?

d) Déterminer $\lim_{n\to\infty} E(T_n)$ et $\lim_{n\to\infty} V(T_n)$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère l'ensemble E des suites réelles vérifiant la relation de récurrence :

$$\mathcal{R} \ : \ \forall \ k \in \mathbb{N}^*, \ ku_{k+1} - nu_k + (n-k)u_{k-1} = 0$$

1.a) Vérifier que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) On considère l'application Φ de E dans $\mathbb{R}^2$ qui à toute suite $u \in E$ associe le couple (u_0, u_1). Montrer que Φ est linéaire et injective.

c) Montrer que toute suite de E est constante à partir du rang n.

d) Vérifier que tout suite constante est élément de E.

e) On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 0$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*, \ a_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} C_{n-1}^k$,
avec la convention $C_n^k = 0$ pour $k > n$.
Montrer que (a_n) est élément de E. En déduire la dimension de E et la forme générale des suites de E.

2. Un point P se déplace sur un axe gradué de 0 jusqu'à n par unité de temps et par sauts de longueur 1.
Ses déplacements sont déterminés par les règles suivantes :
- si à l'instant $k \geq 1$, P se trouve en 0 ou en n, il y reste définitivement.
- si à l'instant k, il se trouve en i pour $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, il se trouvera au temps $k+1$ en $i+1$ avec la probabilité $\dfrac{i}{n}$ ou bien en $i-1$ avec la probabilité $\dfrac{n-i}{n}$.
- le point se trouve en $t = 0$ en 0 et il se trouve au temps $t = 1$ en 1.

On cherche à déterminer la probabilité que le point arrive en n.

On appelle G l'événement : « P arrive en n », et on note X_k la variable aléatoire égale à l'abscisse du point au temps k.

Pour $i \in \{0, \cdots, n\}$, on pose $p_i^k = p(G \mid X_k = i)$ (probabilité que le point arrive en n sachant qu'au temps k il se trouve en i).
On admettra que l'événement « le point arrive en n à un instant quelconque » est indépendant du moment où il se trouve en i, c'est-à-dire que p_i^k ne dépend pas de k. On pose alors $p_i^k = p_i$.

Déterminer la probabilité qu'il arrive en n.
(On raisonnera à partir de la suite (p_i) définie par ce qui précède et $p_k = 1$ pour $k \geqslant n$).

1. Vérifier que les polynômes $1,\ X,\ X(X-1),\ X(X-1)(X-2)$ forment une base de $\mathbb{R}_3(X)$. Ecrire la décomposition des polynômes $X^2,\ X^3$ sur cette base.

2. Soit T une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note m_i le moment d'ordre i de cette variable.
Déterminer m_i pour $i = 1,\ 2,\ 3$.

3. Soient $T_1,\ T_2, \cdots, T_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que T. On cherche à estimer le paramètre inconnu λ.

a) Quelle est la loi suivie par $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$? Montrer que $M_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k$ est un estimateur sans biais de λ.

b) Préciser $E(T_k^2),\ E(M_n^2)$ et $E(T_k M_n)$ pour k dans $\{1, \ldots, n\}$.

On pose $V_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} [T_i - M_n]^2$.

Est-ce que V_n est un estimateur sans biais de λ ?

Proposer un estimateur W_n sans biais de λ obtenu à l'aide de V_n.

4. On montrerait à l'aide des résultats des premières questions que la variance de W_n est égale à $\displaystyle\frac{n}{(n-1)^2}\lambda(1+2\lambda)$.

Entre M_n et W_n quel est le meilleur estimateur, c'est-à-dire celui de variance minimum ?

On effectue une succession indéfinie de lancers indépendants avec une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $(1-p)$. On dit que la première série est de longueur $L_1 = n \geqslant 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième, l'autre.
On définit de même la longueur L_2 de la 2-ieme série.

1. Déterminer la loi de L_1 et son espérance. Pour quelle valeur de p, $E(L_1)$ est-elle minimum ?

2. Donner la loi du couple (L_1, L_2).

3. Déterminer la loi de L_2, son espérance et sa variance.

4. L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?
On admet l'existence de la covariance de L_1 et L_2. Son signe est-il prévisible ?

Soit X une variable aléatoire admettant une densité strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.

1. a) Montrer que sa fonction de répartition F_X définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0, 1[$.

On note F_X^{-1} sa réciproque. Soit alors U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
b) Montrer que $F_X^{-1}(U)$ suit la même loi que X.

c) Déterminer F_X^{-1} quand X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{b}$, avec $b > 0$.

2. En Turbo-Pascal, la fonction **random** simule une variable suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Par exemple, si **T** est une variable de type **real**, l'instruction **T := random** affecte à **T** un réel de [0,1[suivant la loi uniforme sur cet intervalle.
On admettra que les appels successifs à **random** sont indépendants.

Définir en Pascal une fonction **Gamma (b : real ; n : integer)** simulant la loi Gamma de paramètres b et n ($b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$)

3. On considère l'instruction **T := (Gamma(1 , n) - n) / sqrt (n)** où **T** est une variable de type **real**. Quelle est son effet lorsque n est "grand" ?

Existe-t-il un réel a tel que l'on puisse définir une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = (ak+1)\mathrm{e}^{-k} \text{ ?}$$

Soient A, B, et C trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant une même loi binomiale de paramètres n et p.

Soit M la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe la matrice $M(\omega)$ définie par :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la probabilité que M soit inversible ?

2. Quelle est la probabilité que M soit nilpotente ? (une matrice X est dite nilpotente s'il existe $p > 0$ tel que $X^p = 0$.)

3. Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur ?

4. Donner la loi, l'espérance et la variance du nombre de valeurs propres de M. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

5. Donner la loi, l'espérance et la variance de la plus grande des valeurs propres.

6. On suppose $p = 1/2$.
a) Quelle est la probabilité qu'au moins une des colonnes de M soit égale à la somme des deux autres ?
b) Quelle est la probabilité que toutes les valeurs propres de M soient des entiers pairs ?

On considère 6 dés, cinq étant équilibrés. Le dernier est pipé de manière à ce que lorsqu'on lance ce dé, chacun des chiffres apparaît avec une probabilité proportionnelle à ce chiffre.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire égale au chiffre donné par le dé truqué lorsqu'on le lance.

2. On effectue n tirages successifs et indépendants d'un dé parmi les six.

Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire égale au nombre de fois où est tiré le dé truqué ?
Combien de tirages doit-on effectuer pour que la probabilité d'avoir obtenu le dé truqué parmi ceux tirés soit au moins $1/2$?

3. On effectue n tirages successifs sans remise d'un dé parmi les six.

Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire égale au nombre de fois où est tiré le dé truqué ?
Combien de tirages doit-on effectuer pour que la probabilité d'avoir obtenu le dé truqué parmi ceux tirés soit au moins $1/2$?

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{5^{-x}}{2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{5^x}{2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité qu'on nommera X, dont on donnera une densité et l'espérance si elle existe.

2. Pour n entier naturel non nul, on note Y_n la variable aléatoire définie comme la partie entière de nX.
On rappelle que si x est un nombre réel, la partie entière de x est le plus grand entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$.

a) Déterminer la loi de Y_n.

b) Déterminer son espérance et sa variance si elles existent.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles à densité, indépendantes, toutes de même loi, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On note f une densité de ces variables aléatoires et F leur fonction de répartition.

1. a) Montrer qu'une densité g de la variable $X_1 - X_0$ est donnée par :

$$g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t-x)\,dt.$$

b) Calculer $P(X_0 < X_1)$ et $P(X_1 < X_0)$.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour toute permutation σ de $[\![0,n]\!]$, on a :

$$P(X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}) = P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n)$$

et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)} \leq x) = P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n \leq x)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $P(E_n)$ où E_n est l'événement :

« Il existe deux indices distincts i, j de $[\![0,n]\!]$ tels que $X_i = X_j$ »

b) Montrer que $P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n) = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

c) Calculer $P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n \leq x)$ en fonction de $F(x)$.

3. Si $\omega \in \Omega$, on note $T(\omega)$ le plus petit indice $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $X_n(\omega) > X_0(\omega)$ si un tel indice existe et $T(\omega) = 0$ sinon.

a) Calculer $P(T = n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. La variable T admet-elle une espérance ?

b) En remarquant que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, calculer $P(T > 0)$.

4. On pose pour tout $\omega \in \Omega, Y(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.

a) Calculer pour $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $P([T = n] \cap [Y \leq x])$.

b) Comment en déduirait-on la fonction de répartition de Y ?

Si X est un ensemble, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X et pour tout entier naturel k, $\mathcal{P}_k(X)$ désigne l'ensemble des parties de X à k éléments.
Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul et E_n désigne l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Soient a et b deux entiers tels que $1 \leq a \leq n$ et $1 \leq b \leq n$. On tire au hasard une partie A dans $\mathcal{P}_a(E_n)$ et une partie B dans $\mathcal{P}_b(E_n)$. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'éléments de $A \cap B$ et Y la variable aléatoire égale au nombre d'éléments de $A \cup B$.

a) Dans le cas particulier où $n = 7, a = 4, b = 2$, déterminer la loi de X.

b) Dans le cas général, calculer l'espérance des variables X et Y.

c) Sous la contrainte $a + b = n$, quels sont les couples (a, b) pour lesquels l'espérance de X est maximale ?

2. On tire au hasard une partie C dans $\mathcal{P}(E_n)$, puis on tire au hasard une partie D dans $\mathcal{P}(C)$. On note Z la variable aléatoire égale au cardinal de D. Déterminer la loi de Z et son espérance.

Soit m et n deux entiers naturels non nuls. On dispose d'une urne contenant m jetons blancs numérotés de 1 à m et n jetons noirs numérotés de 1 à n.

1. On tire successivement et sans remise les $m+n$ jetons de l'urne. On appelle X le rang d'apparition du premier jeton portant le numéro 1 et Y le rang d'apparition du premier jeton blanc.

a) Déterminer la plus grande valeur notée α (respectivement β) prise par la variable aléatoire X (respectivement Y).

b) Calculer $P([X = \alpha] \cap [Y = \beta])$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur m et n pour que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes.

2. On effectue maintenant une succession de tirages avec remise dans cette urne. On note encore X le rang d'apparition du premier jeton numéroté 1 et Y celui du premier jeton blanc. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m et n pour que X et Y soient indépendantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On dit qu'une variable aléatoire X définie sur Ω suit une loi de Pascal de paramètres n et p si $X(\Omega) = \{n, n+1, \ldots\ldots\}$ et si pour $k \geqslant n$,

$$P[X = k] = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}, \ (0 < p < 1,\ q = 1 - p \text{ et } n \in \mathbb{N}^*).$$

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p.
Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on pose $S_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$.

1. Montrer que si S_{n-1} suit la loi de Pascal de paramètres $n-1$ et p, S_n suit la loi de Pascal de paramètres n et p. Conclure.

2. Déterminer $P[T_n = 1]$ et pour tout $s \geqslant n$, $P[T_n = 1 / S_n = s]$, $(n \geqslant 2)$.

3. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $q \in]0, 1[$, $\displaystyle\sum_{s=n}^{+\infty} C_{s-2}^{n-2} q^{s-n} = \frac{1}{p^{n-1}}$,

puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $q \in]0, 1[$, $\displaystyle\sum_{s=n}^{+\infty} C_s^n q^{s-n} = \frac{1}{(1-q)^{n+1}}$.

4. On suppose p inconnu. Montrer que $P_n = \dfrac{n-1}{S_n - 1}$ est un estimateur sans biais de p.

5. En utilisant la question 3, calculer l'espérance de la variable $\dfrac{(n-1)^2}{(S_n-1)(S_n-2)}$, (avec $n \geqslant 3$).
En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} V(P_n) = 0$, où $V(P_n)$ désigne la variance de P_n.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k = P(X = k)$ et $Q_k = P(X > k)$.

1. Montrer que la série $\Phi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p_k . x^k$ converge pour tout $x \in [-1, 1]$ et que la série $\Psi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} Q_k . x^k$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$.

2. Que vaut $Q_{k-1} - Q_k$? Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(1 - x) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q_k \, x^k$. En déduire que :

$$(\forall\ x \in]-1, 1[) \qquad \Psi(x) = \frac{1 - \Phi(x)}{1 - x}$$

A quelle condition peut-on prolonger par continuité la fonction Ψ en 1 ?

3. On suppose que X admet une espérance et on admet que l'on peut dériver terme à terme la série de somme $\Phi(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$, c'est-à-dire que pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\Phi'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k . x^{k-1}$$

Montrer qu'alors : $E(X) = \Phi'(1) = \Psi(1)$.

4. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce donnant pile (P) avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et face (F) avec la probabilité $q = 1 - p$.
Soit T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois pile suivi immédiatement de face ($T = k$ si et seulement si on obtient pile au $(k-1)$-ième lancer, face au k-ième lancer et que l'on n'a jamais obtenu PF lors des lancers précédents).

On pose $p_k = P(T = k)$. Calculer p_k pour $k \leq 4$.
Montrer que l'on a :

$$(\forall\ k \geq 2) \qquad p_{k+1} = p.q^{k-1} + p.p_k$$

Déterminer la fonction Φ associée à la variable T et en déduire l'espérance de T.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On considère :
• une variable aléatoire N définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
• deux variables aléatoires A et B indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les lois conditionnées $A|(N = n)$ et $B|(N = n)$ sont des lois binomiales de paramètres $(n + 1, p)$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère le polynôme P_ω défini par :

$$P_\omega(X) = A(\omega)X^{N(\omega)+1} - B(\omega)X^{N(\omega)} + 1$$

1. Quelle est la loi du coefficient A ?

2. Quelle est la loi du degré de P_ω ? (on distinguera le cas où P_ω est le polynôme identiquement nul, pour lequel on pose alors que le degré est $-\infty$, et le cas où P_ω est de degré 0).

3. Quelle est la probabilité que 1 soit racine au moins double de $P_\omega(X)$?

On considère une variable aléatoire à densité X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit f une densité de X et F sa fonction de répartition.

On suppose qu'il existe un réel a tel que f soit identiquement nulle sur l'intervalle $]-\infty, a[$ et continue sur $[a, +\infty[$. On suppose également que X admet une espérance notée $E(X)$.

1. Montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x}$.

2. En effectuant une intégration par parties, montrer que l'intégrale
$$\int_a^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} f(t)dt \right) dx$$
converge, et vaut $E(X) - a$.

3. Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si on suppose seulement f continue sur $]a, +\infty[$?

4. Soient deux réels b et τ tels que $b > 0$ et $\tau > 0$.
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{b}} t^{\tau-1} dt \right) dx$ converge et calculer sa valeur.

5.a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f : x \mapsto \begin{cases} \alpha.\mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
Déterminer α pour que f représente la densité d'une variable aléatoire.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt \right) dx$ converge et calculer sa valeur.

On considère deux variables aléatoires à densité X et Y, indépendantes, définies sur le même espace probabilisé ; X suit une loi exponentielle de paramètre a, Y suit une loi exponentielle de paramètre b, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs donnés.

On définit les variables aléatoires : $T = \min(X, Y), U = \max(X, Y), Z = U - T$.

(*N.B : dans chacune des questions, on prêtera attention au cas où* $a = b$).

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire D définie par $D = X - Y$.

2. Exprimer Z en fonction de X et de Y, et déterminer une densité de Z.

3. Calculer l'espérance et la variance de Z.

4. Pour n entier positif, exprimer le moment d'ordre n de Z :
   a) en fonction des moments d'ordre n de X et de Y,
   b) en fonction de n, a, b.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Lors d'une épreuve de tir à l'arc, un concurrent dispose de n flèches, $n \geq 1$ fixé ; son objectif est d'envoyer chacune de ses n flèches le plus près possible du point O.
Pour chaque flèche décochée $f_i, 1 \leq i \leq n$, on suppose que l'abscisse X_i et l'ordonnée Y_i du point d'impact de f_i, sont deux variables aléatoires indépendantes, toutes deux de loi normale d'espérance nulle et d'écart-type σ (exprimé dans l'unité commune du repère), σ étant un paramètre réel inconnu.

1. On note D_i la distance aléatoire du point d'impact de la flèche f_i à O. Déterminer une densité de D_i (on pourra reconnaître les variables aléatoires $\dfrac{X_i^2}{\sigma^2}$ et $\dfrac{Y_i^2}{\sigma^2}$).

2. Calculer l'espérance et la variance de D_i ; en déduire une fonction simple $\widetilde{D_i}$ de D_i telle que $E(\widetilde{D_i}) = \sigma$ (E désignant l'opérateur espérance).

3. On suppose que les variables aléatoires $(D_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendantes. On s'intéresse à la distance aléatoire D de la meilleure flèche décochée par l'archer – au sens de la plus proche de O – parmi les n.

a) Exprimer D en fonction des variables aléatoires D_i, $1 \leq i \leq n$.

b) Déterminer la loi de D (on précisera la fonction de répartition et une densité).

c) Calculer l'espérance et la variance de D ; en déduire un estimateur sans biais D' de σ, fonction simple de D ; est-il convergent ? (justifier le bien-fondé de ce dernier résultat).

d) Proposer un estimateur de σ de meilleure qualité que celui précédemment rencontré.

L'engouement du public pour un jeu de foire, permettant de gagner des lots divers et variés, est tel qu'il est nécessaire d'en présélectionner les candidats. On organise donc une suite d'épreuves de sélection, chaque épreuve réunissant n candidats, $n \geq 1$ étant fixé, toutes basées sur le même principe.
A chaque épreuve :

• un nombre réel mystère a est déterminé au hasard par la fonction **Random** d'un calculateur électronique (a est donc la réalisation d'une variable aléatoire de densité uniforme sur l'intervalle$[0,1]$, et a est susceptible de changer d'une épreuve à l'autre, mais est une constante pour une épreuve donnée).

• chacun des n candidats est alors invité à proposer son évaluation de a, en inscrivant, en secret et indépendamment des autres, sa réponse sur papier.

• sera alors sélectionné pour le jeu celui des n candidats dont la réponse sera la plus proche de a (par valeur supérieure ou inférieure).

On fait les hypothèses suivantes :

• la réponse du candidat i, pour $1 \leq i \leq n$, est une variable aléatoire, notée X_i, à densité, de loi uniforme sur $[0,1]$.

• les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

On admet que chaque épreuve de sélection ne fournit qu'un seul gagnant.
On s'intéresse à la variable aléatoire Z_a, mesurant l'erreur aléatoire d'évaluation de a par le gagnant d'une épreuve de sélection.

1. Exprimer Z_a en fonction des variables aléatoires $X_i, (1 \leq i \leq n)$ et de a. Préciser $Z_a(\Omega)$.

2. Le calculateur fournit la valeur $a = 1$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Z_1 ; en déduire une densité de Z_1.

b) Calculer l'espérance et la variance de Z_1.

3. On revient au cas général où a est une valeur quelconque de l'intervalle $[0,1]$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Z_a (on distinguera deux cas en comparant a à $1/2$).

b) En déduire une densité de Z_a.

4. En plus d'être l'heureux élu, le candidat sélectionné gagne, en cadeau de bienvenue, la somme $1-Z_a$, exprimée en milliers d'Euros. Calculer l'espérance de gain, à l'issue de cette phase de sélection, du vainqueur d'une épreuve.

Pour p entier naturel non nul, on considère $p+1$ urnes notées $U_0, U_1, \dots, U_p$. Dans chaque urne il y a p boules indiscernables au toucher ; pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'urne numéro i, contient i boules blanches, les autres boules étant noires.

On choisit une urne au hasard et dans l'urne choisie, on effectue n tirages avec remise d'une boule ($n \in \mathbb{N}^*$). On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches ainsi obtenues.

1. Exprimer la loi de N_p.

2. Déterminer l'espérance $E(N_p)$ de N_p.

3. L'entier n étant fixé, montrer que, pour tout entier k de $[\![0, n]\!]$:

$$\lim_{p \to \infty} P(N_p = k) = C_n^k \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx,$$

En déduire la valeur de cette limite.

Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante : il est enfermé dans une cage comportant quatre portes derrière chacune desquelles se trouve un beau morceau de gruyère. Trois des quatre portes sont munies d'un dispositif envoyant à l'animal une décharge électrique s'il essaie de les franchir. La quatrième laisse le passage libre.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.

Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance dans chacun des cas suivants :

1) Le rat n'a aucune mémoire : il recommence ses tentatives sans tenir compte des échecs passés.

2) Le rat a une mémoire immédiate : il ne tient compte que de l'échec qui précède immédiatement sa nouvelle tentative.

3) Le rat a une bonne mémoire : il élimine les portes où il a échoué.

Soit n un entier naturel non nul. Tous les tableaux envisagés (type tab) sont des permutations de $[\![1,n]\!]$.
On considère la fonction T définie en Turbo-Pascal par :

```
Function T(a : tab) : integer ;
var i : integer ;
begin
  i := 1 ;
  while ( a[i] <> i ) and ( i < n+1 ) do
  i := i+1 ;
  T := i
end ;
```

1. Expliquer ce qu'est la fonction T.

On considère cette fonction comme une variable aléatoire sur l'univers S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$ muni de l'équiprobabilité.

2. Soit $r \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $P(T \leqslant r) = \sum\limits_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} C_r^k \dfrac{(n-k)!}{n!}$.
En déduire la valeur de $P(T = n+1)$.

3. a) Exprimer $E(T)$ en fonction de n et des nombres $P(T \leqslant r)$, avec $2 \leqslant r \leqslant n$.

b) Établir, pour $k \leqslant n$, la relation : $\sum\limits_{r=k}^{n} C_r^k = C_{n+1}^{k+1}$.

c) En déduire que : $E(T) = (n+1) \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(k+1)!}$.

d) Donner un équivalent simple de $E(T)$, lorsque n tend vers l'infini.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre

1. On pose, pour $n \geqslant 1$, $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. Rappeler l'expression d'une densité f_n de Y_n, ainsi que l'espérance et la variance de Y_n.

2. On note Y_n^* la variable aléatoire centrée réduite associée à Y_n.

 a) Déterminer une densité φ_n de Y_n^* .

 b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

(On admettra la formule de Stirling : $n! \underset{(n\to\infty)}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$).

 c) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi_n(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

Soit T une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et a un nombre réel strictement positif. On pose $X = |T| + a$, où $|T|$ est la valeur absolue de T.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X, en fonction de celle Φ de T.

2. En déduire une densité f_a de X.

3. Montrer que X admet des moments de tous ordres. Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

Soit n un entier naturel, supérieur ou égal à 2. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un n-uplet de réels, on appelle réarrangement de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le n-uplet $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \ldots, \widehat{x_n})$ tel que :

⋆ $\widehat{x_1} \leq \widehat{x_2} \leq \ldots \leq \widehat{x_n}$;

⋆ il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que pour tout $i, \widehat{x}_i = x_{\sigma(i)}$.

On notera $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \ldots, \widehat{x_n}) = R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Soit n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs réelles, indépendantes et de même loi.
On s'intéresse aux n variables aléatoires rangées

$$(\widehat{X_1}, \widehat{X_2}, \ldots, \widehat{X_n}) = R(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

définies pour tout $\omega \in \Omega$, par :

$$\big(\widehat{X_1}(\omega), \widehat{X_2}(\omega), \ldots, \widehat{X_n}(\omega)\big) = R\big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big)$$

1. Soit $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés.

a) Exprimer l'événement $(\widehat{X_r} \leq x)$ en fonction des événements $(\widehat{X_i} \leq x)$ ou de leurs complémentaires, i décrivant $[\![1, n]\!]$.

b) En déduire l'expression de la fonction de répartition F_r de $\widehat{X_r}$ en fonction de la fonction de répartition F des variables aléatoires X_i.

2. On suppose que F admet une dérivée continue f. Montrer qu'une densité de $\widehat{X_r}$ est donnée par :

$$f_r(x) = nC_{n-1}^{r-1}\big(F(x)\big)^{r-1}\big(1 - F(x)\big)^{n-r} f(x)$$

3. On suppose que la loi commune des variables aléatoires X_i est la loi uniforme sur $[0, 1]$. Dans le cas où $n = 2p + 1$, calculer une densité de la variable aléatoire médiane $\widehat{X}_{p+1}$ et son espérance.

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité, indépendantes, de densités respectives f et g nulles hors de l'intervalle $[0,1]$.

1. a) Déterminer une densité de $1-Y$.

b) Déterminer une densité de $\ln X$.

c) Montrer qu'une densité de $Z = X(1-Y)$ est nulle hors de $[0,1]$ et est définie sur l'intervalle $]0,1[$ par :

$$x \mapsto \int_x^1 f\left(\frac{x}{t}\right) g(1-t)\frac{dt}{t}$$

(on pourra commencer par déterminer une densité de $\ln Z = \ln X + \ln(1-Y)$).

2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi à valeurs dans $[0,1]$.

A tout $\omega \in \Omega$, on associe l'intervalle $\left[\prod_{i=1}^{n+1} X_i(\omega), \prod_{i=1}^{n} X_i(\omega)\right]$ de longueur $L_n(\omega)$.

Montrer que pour tout $n \geq 1, L_n = X_1.Y_n$, où Y_n est une variable aléatoire de même loi que L_{n-1} et indépendante de X_1.

3. On suppose que les variables (X_n) suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la loi de L_n ainsi que son espérance.

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles positives ou nulles, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi. On lui associe la suite (S_n) de variables aléatoires définie par :

$$S_0 = 0, \quad \forall\, n > 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Pour tout $n \geq 0$, on note F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire S_n.

1. Montrer que pour tout $a \geq 0$, la suite $\big(F_n(a)\big)_{n\geq 0}$ est décroissante.

2. On définit, pour tout $a \geq 0$, une variable aléatoire N_a sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

pour tout $\omega \in \Omega$, $N_a(\omega) = \begin{cases} \text{card}(\{n \mid S_n(\omega) \in [0, a]\}) & \text{si ce cardinal est fini} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que pour tout $n \geq 1$: $P(N_a = n) = F_{n-1}(a) - F_n(a)$.
En déduire que $P(N_a = -1) = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(a) = 0$.

3. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de réels, avec $a_0 = 1$.

a) Montrer que si la série $\sum n.a_n$ est convergente, il en est de même des séries $\sum a_n$ et $\sum n(a_{n-1} - a_n)$ et que l'on a alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} - a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

b) On suppose que la série $\sum n.F_n(a)$ est convergente.
Montrer que $P(N_a = -1) = 0$.
Montrer que l'espérance $E(N_a)$ existe et vaut $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n(a)$.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On lui associe la suite (S_n) de variables aléatoires définie par :

$$S_0 = 0, \quad \text{ et } \forall\, n \geq 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

1. On note $Y_n = \mathrm{e}^{-S_n}$ et $q = E(\mathrm{e}^{-X_1})$, où $E(T)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire T.

a) Vérifier que $\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega \mid Y_n(\omega) \geq \mathrm{e}^{-t}\}$

b) En écrivant la définition de $E(Y_n)$, montrer que, pour tout $t \geq 0$:

$$P(S_n \leq t) \leq \mathrm{e}^t.q^n$$

On suppose désormais que $q < 1$.

2. a) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que la suite $\big(S_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si il existe un entier k tel que pour tout entier n, $S_n(\omega) < k$. En déduire que :

$$\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} S_n(\omega) \text{ existe }\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Big[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq k\} \Big]$$

b) Montrer que pour tout $t \geq 0$:

$$P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) \leq t\} \Big) = 0$$

c) En déduire la probabilité $P\Big(\{\omega \in \Omega \mid \lim\limits_{n\to\infty} S_n(\omega) \text{ existe }\}\Big)$.

3. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(\omega) = \infty$. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. On définit $\mu_t(\omega)$ par la condition :

$$S_{\mu_t(\omega)-1}(\omega) \leq t < S_{\mu_t(\omega)}(\omega), \text{ avec la convention : } S_{-1}(\omega) = 0$$

a) Soit F_n la fonction de répartition de S_n. Montrer que pour tout $t \geq 0$, la série $\sum F_n(t)$ est convergente.

b) Montrer que μ_t est une variable aléatoire discrète et que :

$$E(\mu_t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t)$$