**1.** Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle vérifiant $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

**1. a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

**1. b)** On suppose que la variable aléatoire $X$ admet une espérance notée $E(X)$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant nP(X > n) \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$.

En déduire que la série de terme général $P(X > n)$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = E(X).$$

**1. c)** On suppose que la série de terme général $P(X > n)$ converge. Montrer que la série de terme général $kP(X = k)$ converge et que $X$ admet une espérance.

**1. d)** Énoncer le théorème qui vient d'être établi.

**2.** Un horticulteur plante $n$ oignons de narcisse dans un jardin (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Chaque oignon est susceptible de fleurir au printemps et ne donne une fleur qu'avec la probabilité $p$ ; de plus, s'il donne une fleur une année, il refleurit de manière certaine les années suivantes mais s'il n'en donne pas, cela n'influe en rien sur ce qui est susceptible de se passer les années suivantes.
Pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note $X_j$ le nombre aléatoire d'années nécessaires au narcisse numéro $j$ pour produire une première fleur. On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires et qu'elles sont mutuellement indépendantes.
On note $X$ le nombre aléatoire d'années au bout duquel le jardin sera, pour la première fois, fleuri des $n$ narcisses.

**2. a)** Exprimer $X$ en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, et calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k)$.

**2. b)** En déduire que $X$ admet une espérance et exprimer cette espérance comme somme d'une série.

**3.** Déterminer un équivalent simple de $E(X)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
*On utilisera des intégrales bien choisies de la fonction* $x \mapsto 1 - \left(1 - (1-p)^x\right)^n$ *ainsi que le changement de variable* $x = \dfrac{\ln(1-t)}{\ln(1-p)}$.

Une urne $U_1$ contient $n$ boules blanches et une urne $U_2$ contient $n$ boules noires.

On tire à chaque tirage simultanément une boule dans $U_1$ que l'on met dans $U_2$ et une boule dans $U_2$ que l'on met dans $U_1$.

On note, pour $k \geqslant 1$, $X_k$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans $U_1$ après le $k$-ième tirage, et $X_0$ la variable constante égale à $n$.

On pose, pour $k \geqslant 0$, $Z_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ \vdots \\ P(X_k = n) \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer la matrice $A_n$ telle que, pour $k \geqslant 1$, $Z_k = \dfrac{1}{n^2} A_n Z_{k-1}$.

b) Quelle est la probabilité qu'au bout de $n$ tirages on n'ait que des boules noires dans $U_1$ ? Quel(s) coefficient(s) de $A_n^n$ peut-on en déduire ?

2. On se place dans le cas $n = 2$.

a) Etudier la suite de terme général $E(X_k)$.

b) Montrer que $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de $A_2$.

c) En remarquant que $Z_0 = \dfrac{1}{6} Y_1 + \dfrac{1}{3} Y_2 - \dfrac{1}{2} Y_3$, déterminer $Z_k$ pour $k \geqslant 1$.

d) En déduire, pour $0 \leqslant i \leqslant 2$, la limite de $P(X_k = i)$ lorsque $k$ tend vers l'infini.

On étudie dans une population une grandeur $X$ suivant une loi uniforme sur un intervalle de longueur 1 : $[\theta, \theta+1]$ et on cherche à estimer $\theta$.

On considère donc un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ indépendant extrait de la loi uniforme sur $[\theta, \theta+1]$.

On pose $S_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ et $I_n = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$.

1. Déterminer la loi de $S_n$, son espérance et sa variance.

2. En remarquant que $I_n = -\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (-X_i)$, donner l'espérance et la variance de $I_n$.

3. On pose, pour $\alpha \in [0,1]$, $\Theta_n(\alpha) = \alpha(S_n - 1) + (1-\alpha)I_n$.

a) Déterminer $\alpha$ pour que $\Theta_n(\alpha)$ soit un estimateur sans biais de $\theta$. On note $\Theta_n$ l'estimateur ainsi obtenu.

b) En admettant que $\mathrm{Cov}(S_n, I_n) = \dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)}$, calculer la variance de $\Theta_n$.

4. On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $\Theta'_n = \overline{X_n} - \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que $\Theta'_n$ est un estimateur sans biais et convergent de $\theta$.

b) Si vous deviez estimer $\theta$, quel estimateur choisiriez-vous et pourquoi ?

**Préliminaire** :
tan désigne la fonction tangente. On pose $g(x) = \tan x$, pour tout réel $x$ strictement compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.
Montrer que $g$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
Sa bijection réciproque $g^{-1}$ est notée $\operatorname{Arc}\tan$.
Montrer que $\operatorname{Arc}\tan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arc}\tan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

En déduire que, pour tout réel strictement positif $c$, et pour tous réels $A$ et $B$,

$$\int_A^B \frac{c}{c^2+t^2}\, dt = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{B}{c}\right) - \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{A}{c}\right).$$

On se donne deux variables aléatoires $X$ et $Y$ indépendantes, de densités respectives $f_X$ et $f_Y$, avec $f_X(t) = \dfrac{a}{\pi(a^2+t^2)}$ et $f_Y(t) = \dfrac{b}{\pi(b^2+t^2)}$, pour tout réel $t$.
($a$ et $b$ désignent deux réels strictement positifs.)
On pose $Z = \max(X, Y)$, et $V = X^2$.

1. Vérifier que $f_X$ et $f_Y$ sont bien des densités de probabilités.

2. a) Déterminer une densité de $Z$.
   b) La variable aléatoire $Z$ possède-t-elle une espérance ? Une variance ?

3. a) Déterminer une densité de $V$.
   b) La variable aléatoire $V$ possède-t-elle une espérance ? Une variance ?

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On note $F$ leur fonction de répartition commune.

1. Pour tout $n > 0$, on pose $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition $F_n$ de $M_n$ en fonction de $F$ et $n$.

2. Dans cette question, on suppose que $X_1$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$. Pour tout $n > 0$, on pose $Z_n = \lambda M_n - \ln n$
Déterminer la limite en loi de la suite $(Z_n)$.

3. Dans cette question, $a$ désigne un réel strictement positif et on suppose que $X_1$ admet pour fonction de répartition :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^a & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Pour tout $n > 0$, on pose $Z_n = n^{1/a}(M_n - 1)$.

Déterminer la limite en loi de la suite $(Z_n)$.

Que retrouve-t-on lorsque $a = 1$ ?

On dispose d'une infinité de pièces. La $k^{\text{ème}}$ pièce donne Pile avec la probabilité $p_k \in ]0,1[$ et Face avec la probabilité $q_k = 1 - p_k$. On effectue une infinité de lancers, le $k^{\text{ème}}$ lancer utilisant la $k^{\text{ème}}$ pièce.

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit une variable aléatoire réelle $Y_n$ par

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si Face est tombé au } n^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ 1 & \text{si Pile est tombé au } n^{\text{ème}} \text{ lancer} \end{cases}$$

On pose de plus $Y_0 = 0$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définies par $X_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$ :

$$X_n = n - \max\{0 \leqslant i \leqslant n \mid Y_i = 0\}$$

1. a) Que représente la variable aléatoire $X_n$ ?

b) Déterminer la loi de $X_n$.

2. Soit $T$ la variable aléatoire définie par $T = \inf\{m \geqslant 1 \mid X_m = 0\}$, si cet ensemble est non vide et $T = 0$ si $\{m \geqslant 1 \mid X_m = 0\}$ est vide.

a) Calculer la probabilité de l'événement $(T = 0)$.

b) Montrer que $P(T = 0) = 0$ si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} p_k$ diverge.

3. On suppose désormais que pour tout $k \geqslant 1, p_k = p$. Pour $n \geqslant 1$, calculer la probabilité $P(T = n)$.
Quelle est la loi de $T - 1$ ? En déduire l'espérance de $T$.

On définit une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels par :

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \text{ et pour tout } k \geqslant 2 \quad P_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1}(X - i)$$

1. Montrer que pour tout $n$ entier naturel, il existe $(n+1)$ réels $a_{0,n}, a_{1,n}, \ldots, a_{n,n}$ tels que $X^n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{k,n} P_k(X)$

Ces réels sont-ils déterminés de manière unique ?

2. Soit $n$ un entier naturel, $n \geqslant 1$, et $Y$ une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$.
Pour tout réel $x$ strictement positif, on pose $G(x) = E(x^Y)$, où $E(Z)$ représente l'espérance d'une variable aléatoire $Z$.

a) Montrer que $G$ est de classe $C^\infty$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G^{(k)}(1)) = E(P_k(Y))$, où $G^{(k)}$ désigne la dérivée $k$-ième de la fonction $G$.

b) En déduire que $E(Y^k) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_{i,k} G^{(i)}(1)$.

3. On suppose que $Y$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. En utilisant uniquement les questions précédentes, calculer $E(Y^2)$ et $E(Y^3)$.

On considère deux pièces truquées $A$ et $B$ ; $A$ donne Pile avec la probabilité $a$ $(0 < a < 1)$, et $B$ donne Pile avec la probabilité $b$ $(0 < b < 1)$ .
On choisit une pièce au hasard et on la lance ; si l'on obtient Pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus $k$ fois $(k \geqslant 2)$.

1. Déterminer la probabilité de lancer la pièce $A$ au $k$-ième lancer.

2. Déterminer la probabilité d'obtenir Pile au $k$-ième lancer.

3. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque $k$ tend vers l'infini. Interpréter le résultat obtenu lorsque $a = 1$ et $0 < b < 1$.

Soit $p$ un réel tel que $0 < p < 1$, et $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f : x \mapsto px^2 + 1 - p$$

1. Étudier les variations de $f$ sur $[0, 1]$.

2. Étudier la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1 - p$ et pour tout $n \geqslant 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

3. On considère une plante qui peut donner naissance à deux descendants avec la probabilité $p$ ou à aucun descendant avec la probabilité $1 - p$. On s'intéresse à sa descendance et on note $X_n$ le nombre de descendants issus de la $n$-ième génération, *i.e.* le nombre de descendants de la plante à la $(n+1)$-ième génération.

a) Exprimer, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = 0)$ en fonction de $u_n$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0)$. Interpréter le résultat trouvé.

Pour tout $a$ réel, on pose : $M_a = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & -3 \end{pmatrix}$

1. a) Déterminer en fonction de $a$ les valeurs propres de $M_a$, considérée comme élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Pour quelles valeurs de $a$ ces valeurs propres sont–elles réelles ?

c) Pour quelles valeurs de $a$, la matrice $M_a$ est–elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ?

2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X$ une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0,2]$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice

$$M_\omega = \begin{pmatrix} 1 & -X(\omega) \\ X(\omega) & -3 \end{pmatrix}$$

Soit $Y$ la variable aléatoire définie par « $Y(\omega)$ est la plus grande des valeurs propres de $M_\omega$ ».
Déterminer une densité de la loi de $Y$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X$ une variable aléatoire à valeurs réelles, de fonction de répartition $F$ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x/2}(1 + \dfrac{x}{2}) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. La fonction $F$ est–elle continue sur $\mathbb{R}$ ?

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$. Interpréter ce résultat.

3. Déterminer une densité de probabilité $f$ de $X$.

4. Étudier les variations de $f$ et représenter l'allure du graphe de cette fonction.

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} C.\mathrm{e}^{-|x|} & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a) Déterminer la constante $C$ pour que $f$ soit une densité de probabilité.

b) Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi admettant $f$ pour densité.

2. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes telles que $X$ admette $f$ pour densité et telles que $Y$ suive une loi uniforme sur l'intervalle $[-1,1]$. Déterminer la loi suivie par la variable $X - Y$.

3. Le livreur $L$ d'un supermarché décide de passer livrer chez Madame $M$ entre 9h et 11h du matin ; il attendra $M$ pendant 15 minutes (si elle n'est pas là !). Pour sa part $M$ rentrera chez elle entre 9h et 11h et y restera pendant une demi-heure. On prend comme origine des temps 10h et comme unité l'heure. On suppose que $L$ et $M$ agissent indépendamment et que leurs instants d'arrivée chez $M$ sont des variables aléatoires qui suivent respectivement une loi de densité $f$, et une loi uniforme sur le segment $[-1,1]$.

Calculer la probabilité que $M$ soit livrée par $L$.

Soient $n$ et $r$ deux entiers strictement positifs. Lors de la kermesse d'une association, $n$ personnes sont présentes. On tire $r$ fois au sort une personne (avec remise) pour offrir $r$ lots aux personnes présentes.

1. a) Calculer, en fonction de $n$ et de $r$, la probabilité qu'une personne donnée $P_1$ ne reoive aucun lot.

b) Soit $k$ un entier inférieur strictement à $n$. Calculer, en fonction de $n$ et de $r$, la probabilité que les personnes $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ne reoivent aucun lot.

2. a) Rappeler la formule du crible.

b) Calculer, en fonction de $n$ et de $r$, la probabilité que chaque personne ait reu au moins un lot.

3. a) Soit $m$ un entier inférieur strictement à $n$. Déduire de la question précédente le calcul, en fonction de $n, r$ et $m$, de la probabilité $p_m$ qu'exactement $m$ personnes, parmi les $n$ personnes présentes, n'aient rien reu.

b) Comment calculer la probabilité $q_m$ qu'au moins $m$ personnes n'aient rien reu ?

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$ et pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$, $Q_k = X(X-1)\dots(X-k+1)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $E$.

2. On note $F$ l'ensemble des polynômes $P \in E$ tels que $p_n = \dfrac{P(n)}{\mathrm{e}.n!}$ définisse une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire qu'il existe $Y$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $\forall\, n, P(Y = n) = p_n$). Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q_k \in F$.

3. Montrer que $F$ est convexe, c'est-à-dire que si $P_1, P_2 \in F$ et $\lambda \in [0,1]$, alors $\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \in F$. En déduire que si $P \in E$ a pour degré $p$ et si $P = \sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k Q_k$ avec $\alpha_k \in [0,1]$ et $\sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k = 1$, alors $P \in F$.

4. Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k Q_k \in F$ avec $\alpha_k \in [0,1]$ et $\sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k = 1$ et soit $Y$ une variable aléatoire suivant la loi de probabilité associée.
Écrire $XQ_k$ dans la base $\mathcal{B}$. En déduire l'espérance de $Y$ en fonction des $\alpha_k$.

On observe depuis le bord d'une route $R$ à sens unique le passage des voitures à partir d'un instant 0.

On note $T_1$ la variable aléatoire égale au temps d'attente de la première voiture, puis pour tout $n \geqslant 2$, $T_n$ le temps de passage entre la $(n-1)^{\text{ème}}$ et la $n^{\text{ème}}$ voiture. On suppose que les $T_k$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle d'espérance $\dfrac{1}{\lambda} > 0$.

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n$ le temps d'attente de la $n^{\text{ème}}$ voiture. $Y_0$ est la variable certaine égale à 0.
Rappeler la loi de $Y_n$, son espérance et sa variance.

b) Pour tout $T > 0$, on note $C_T$ la variable égale au nombre de voitures passant devant le point d'observation entre les instants 0 et $T$.
Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, comparer les événements $[C_T \geqslant k]$ et $[Y_k \leqslant T]$.
En déduire une expression intégrale de $P[C_T \geqslant k]$ puis, à l'aide d'une intégration par parties, la loi de $C_T$.

2. Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que le point d'observation se situe à la jonction de deux routes $R$ et $R'$ (à sens unique).

On note $T_1$ (resp. $T'_1$) la variable aléatoire égale au temps d'attente de la première voiture venant de $R$ (resp. de $R'$), puis pour tout $n \geqslant 2$, $T_n$ (resp $T'_n$) le temps de passage entre la $(n-1)^{\text{ème}}$ et la $n^{\text{ème}}$ voiture venant de $R$ (resp de $R'$).

On suppose que les $T_k$ (resp. les $T'_k$) suivent la loi exponentielle d'espérance $\dfrac{1}{\lambda}$ (resp. $\dfrac{1}{\lambda'}$).

On suppose en outre l'indépendance mutuelle de toutes ces variables.

a) Pour tout $T > 0$ on note $C_T$ et $C'_T$ les variables respectivement égales au nombre de voitures passant devant le point d'observation entre les instants 0 et $T$ venant de $R$ et de $R'$.
On note $S_T$ la variable $C_T + C'_T$ égale au nombre total de voitures passant devant l'observateur.
Quelle est la loi de $S_T$ ?

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $C_T$ conditionnellement à $[S_T = n]$.

Une voiture passe. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la route $R$ ?

Pour toute variable aléatoire $X$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et pour $B \in \mathcal{B}$ tel que $P(B)0$, sous réserve d'existence, on note $E(X/B)$ et on appelle espérance conditionnelle de $X$ à $B$, l'espérance de $X$ pour la loi conditionnelle à $B$.

On admet le résultat suivant :

*Si $X$ est une variable aléatoire quelconque et $N$ une variable discrète telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et que pour tout $n$, $E(X/N = n)$ existe alors $E(X)$ existe et vaut* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(N = n)E(X/N = n)$

A l'instant 0 un piéton se trouve sur le bord d'une route à sens unique qu'il désire traverser.

On note $T_1$ la variable aléatoire égale au temps qui s'écoule entre le début de l'expérience et le passage de la première voiture, puis plus généralement, $T_i$ pour $2 \leqslant i$, le temps entre le passage de la $(i-1)^{\text{ème}}$ voiture et la $i^{\text{ème}}$.

On suppose que les $T_i$ sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

Prudent, le piéton décide de ne traverser à l'instant $t$ que si la première voiture visible est éloignée de lui de plus d'une certaine distance de sécurité. Le temps mis pour parcourir cette distance par une voiture est $a$.

On note $X$ la variable égale à l'instant où le piéton va traverser la route et $N$ le nombre de voitures qui passeront avant qu'il ne puisse le faire.

On pose $p = \mathrm{e}^{-\lambda a}$, $q = 1 - p$.

1. a) Comparer $[X = 0]$ et $[T_1 > a]$. En déduire $P[X = 0]$ et $P[N = 0]$ en fonction de $p$.

b) Pour $n \geqslant 1$ déterminer $P\big([T_1 \leqslant a] \cap [T_2 \leqslant a] \cap \ldots \cap [T_n \leqslant a] \cap [T_{n+1} > a]\big)$ en fonction de $p$. En déduire la loi de $N$.

c) Soit $n \geqslant 1$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $t > 0$ comparer les probabilités conditionnelles $P([T_i \leqslant t] \;/\; [N = n])$ et $P([T_i \leqslant t] \;/\; [T_i \leqslant a])$.

Déterminer $P([T_i \leqslant t] \;/\; [T_i \leqslant a])$ (on distinguera les cas $t \leqslant a$ et $t > a$)

En déduire une densité de $T_i$ pour cette loi conditionnelle.

2. a) Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, déterminer l'espérance de $T_i$ pour la loi conditionnelle à $[N = n]$, $n \geqslant 1$.

b) Déterminer l'espérance conditionnelle de $X$ conditionnellement à la réalisation de $[N = n]$.

c) En déduire l'espérance de $X$ en fonction de $a$.

On cherche à évaluer le nombre $N$ de poissons dans un étang.
On prélève dans l'étang un échantillon de $m$ poissons. On les marque et on les remet dans l'étang.
On propose deux méthodes différentes d'estimation de $N$.

**Méthode 1**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant m$.
On prélève des poissons dans l'étang, au hasard et avec remise.
On note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de poissons qu'il a été nécessaire de pêcher pour obtenir $n$ poissons marqués.
Pour tout $2 \leqslant i \leqslant n$, on pose $D_i = X_i - X_{i-1}$. On pose de plus $D_1 = X_1$ et on suppose que les $D_i$ sont des variables aléatoires indépendantes.
1. a) Déterminer, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, la loi de $D_i$, son espérance et sa variance.
En déduire l'espérance et la variance de $X_n$.

b) On pose $A_n = \dfrac{m}{n} X_n$. Montrer que $A_n$ est un estimateur sans biais de $N$.

2. a) Pour $n$ assez grand, par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire $\overline{X_n} = \dfrac{X_n}{n}$ ?

b) On a marqué 200 poissons, puis effectué 450 prélèvements pour obtenir 50 poissons marqués.
On pose $\sigma = \sigma(A_n)$, l'écart-type de $A_n$. On a pu prouver par ailleurs que $\sigma \leqslant 100$.
Déterminer, en fonction de $\sigma$, un intervalle de confiance pour $N$ au seuil de $0,9$. (On donne $\Phi(1,64) \simeq 0{,}95$.)

**Méthode 2**

On prélève successivement et avec remise $n$ poissons. Soit $Y_n$ le nombre de poissons marqués parmi eux.
1. Montrer que $\dfrac{1}{nm} Y_n$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{1}{N}$.

2. Pour quelle raison évidente ne peut-on prendre $\dfrac{nm}{Y_n}$ comme estimateur de $N$ ?
On pose alors $B_n = \dfrac{m(n+1)}{Y_n + 1}$.

a) Calculer l'espérance de $B_n$.

b) Est-il un estimateur sans biais de $N$ ?

On se donne un tableau $A$ à $n$ éléments distincts ($n \geqslant 2$). Que fait l'algorithme suivant :

```
mini :=1 ; maxi :=1 ;
for j := 2 to n do
if A[j]<A[mini] then mini := j else
if A[j]>A[maxi] then maxi := j ;
```

1. Évaluer le nombre minimal, puis le nombre maximal de comparaisons faites.

On cherche à déterminer un équivalent du nombre de comparaisons faites en moyenne. Pour cela, on considère que $A$ contient les éléments de $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ et on associe donc à chaque tableau une permutation sur $E_n$. On suppose enfin que toutes les permutations sont équiprobables.

2. Pour toute permutation $\sigma$, on appelle minimum local un entier $j$ tel que :

$$\forall i, 1 \leqslant i < j \Rightarrow \sigma(i) > \sigma(j)$$

On convient que 1 est toujours un minimum local.
Exprimer le nombre de comparaisons effectuées par l'algorithme en fonction du nombre de minimum locaux de $\sigma$.

3. On note $u_{n,k}$ le nombre de permutations sur $E_n$ qui possèdent $k$ minimum locaux. Montrer que

$$\begin{cases} u_{n,0} = 0, \quad u_{n,n} = 1 \\ u_{n,k} = (n-1)u_{n-1,k} + u_{n-1,k-1} \ (1 \leqslant k \leqslant n) \end{cases}$$

4. Soit $(P_n)$ la famille de polynômes définie par

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_{n,k} x^k$$

a) Déterminer une relation de récurrence entre $P_n$ et $P_{n-1}$. En déduire une expression de $P_n$.

b) Exprimer la dérivée $P_n'$ en fonction de $P_n$.

5. Déterminer le nombre moyen de minimum locaux dans les permutations de $E_n$ et en déduire un équivalent du nombre moyen de comparaisons de l'algorithme.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $U_k = \min(X_1, \ldots, X_k)$. Déterminer la loi de $U_k$.

2. Soit $p \in ]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $N$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On définit la variable aléatoire réelle $V$ par :

$$V = \begin{cases} X_1 & \text{si } N = 0 \\ U_k & \text{si } N = k > 0 \end{cases}$$

Déterminer la loi de $V$ et une densité de cette variable aléatoire.

Soit $U$ une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[0,1[$ et $\lambda$ un réel strictement positif.
On considère les variables aléatoires suivantes :

$$V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U),\ W = \lfloor V \rfloor$$

où $\lfloor V \rfloor$ désigne la partie entière de $V$ puis

$$Y = V - \lfloor V \rfloor \text{ et } Z = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$$

1. Déterminer les lois de $V$ et $W$.

2. Déterminer une densité de $Y$ ainsi que son espérance.

3. Déterminer une densité de $Z$.

4. On considère la variable aléatoire $X = \min(1, V)$. Déterminer la fonction de répartition de $X$ et démontrer que $P(2X^2 - 3X \geqslant -1) \geqslant 1/2$.

On considère une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $N, X_1, \ldots, X_n, \ldots$. Soit $p \in ]0,1[$, $q = 1-p$ et $\lambda$ un réel strictement positif.

On suppose que $N$ suit la loi géométrique de paramètre $p$ et que les variables $(X_i)$, $i \in \mathbb{N}^*$, suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

On note $S$ la variable aléatoire $\sum\limits_{n=1}^{N} X_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une densité de $X_1 + \cdots + X_n$ (on pourra procéder par récurrence).

2. Montrer que :

$$P(X_1 + \cdots + X_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\lambda x)^k}{k!}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

3. a) Déterminer la fonction de répartition de $S$. (On supposera que l'on peut intervertir l'ordre des sommations dans les expressions obtenues).

b) En déduire une densité de $S$ et montrer que $E(S) = E(X_1)E(N)$.

Paul possède un sac qui contient au début 3 billes ordinaires et 1 bille en agate. Il joue avec son copain Luc de la façon suivante : à chaque étape, Luc ajoute 3 billes ordinaires dans le sac, puis il tire de façon équiprobable une bille du sac et la garde. Le jeu s'arrête dès que Luc tire la bille en agate.

On note $X$ le nombre d'étapes du jeu ; avec la convention $X = 0$ si Luc ne tire jamais la bille en agate.

1. Soit $n$ un entier naturel. Vérifier que $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \dfrac{n+1}{n+2}$.
2. Montrer que $P(X = 0) = 0$.
3. Déterminer la loi de $X$.
4. La variable aléatoire $X$ admet-elle une espérance ?

Deux joueurs jouent à pile ou face avec une pièce identique non truquée, et lancent alternativement leur pièce. On définit une variable aléatoire $X_1$ (respectivement $X_2$) comme le numéro du jet à l'issue duquel le premier (respectivement le deuxième) joueur obtient pile pour la première fois (les jets sont comptés indépendamment pour chacun des joueurs).
La variable aléatoire $X$ est le numéro du jet à l'issue duquel un des deux joueurs obtient pile pour la première fois.
La variable aléatoire $J$ vaut 1 (respectivement 2) si le premier (respectivement le deuxième) joueur obtient pile en premier, et vaut 0 si les deux joueurs obtiennent pile en un même nombre de coups.
On cherche à montrer que conditionnellement au fait qu'ils n'obtiennent pas pile en un même nombre de coups, les variables aléatoires $X$ et $J$ sont indépendantes. Autrement dit, si on nomme $H$ l'événement $(X_1 \neq X_2)$, on cherche à montrer que, pour $j = 0, 1, 2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$P([(J = j) \cap (X > k)]/H) = P(J = j/H) \cdot P(X > k/H)$$

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 > k)$. Calculer $P(X_1 < X_2)$ et en déduire $P(H)$.

2. Démontrer que la loi de $X_1$ conditionnelle à l'événement $X_1 < X_2$ est une loi géométrique de paramètre $3/4$. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 > k/X_1 < X_2)$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(H \cap (J = 1) \cap X > k) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P([(J = 1) \cap (X > k)]/H) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X > k/H) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \text{ et que } P(J = 1/H) = P(J = 2/H) = \frac{1}{2}$$

6. Conclure.

1. Soit $U$ une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 1]$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même loi que $U$.

Soit, d'autre part, $Y$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre1. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \min(U_1, \ldots, U_n)$.
Montrer que la suite de variables $(nZ_n)$ converge en loi vers $Y$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^{-\lambda X}$.

3. On considère une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer les limites en loi des suites de terme général :

a) $A_n = n.\min(\mathrm{e}^{-\lambda X_1}, \ldots, \mathrm{e}^{-\lambda X_n})$

b) $D_n = \max(X_1, \ldots, X_n) - \ln n$, dans le cas où $\lambda = 1$.

On considère le programme Pascal suivant :

```
PROGRAM exo ;
USES crt ;
VAR h,X,n :INTEGER ;
BEGIN
RANDOMIZE ;
READLN(n) ;X :=n ;
REPEAT h :=RANDOM(n)+1 ;
IF h>X THEN X :=0 ELSE X :=h ;
WRITELN(X) ;
UNTIL X=0 ;
END.
```

On rappelle que l'instruction a :=RANDOM(n), où a et n sont des variables INTEGER, permet de mettre dans la variable a une valeur au hasard entre 0 et $n-1$.
L'instruction RANDOMIZE permet d'initialiser la fonction RANDOM.

Pour tout entier naturel $N$, on définit la variable aléatoire $X_N$ égale au $(N+1)$-ème nombre affiché.

1. Déterminer la loi de $X_0$

2. a) En déduire la probabilité de $(X_1 = k)$, pour tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

b) Déterminer la loi de $X_1$.

3. a) Montrer que pour tout $N \geqslant 1$ et tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$P(X_N = k) \; = \; \frac{\mathrm{C}_{N+n-k}^{N}}{n^{N+1}}$$

b) En déduire la loi de $X_N$.

On considère le programme Pascal suivant :

```
PROGRAM exo ;
USES CRT ;
const ...
VAR   ...
FUNCTION X(a :REAL) :REAL ;
BEGIN
X :=RANDOM*a ;
END ;
BEGIN
READLN(a) ;u :=X(a) ;v :=a-u ;
w :=u ; IF u>v THEN w :=v ;
t :=u ; IF u<v THEN t :=v ;
FOR k :=1 TO n DO y[k] :=X(a) ;
...
END.
```

où la fonction RANDOM, sans paramètres, retourne, au hasard, une valeur de type REAL comprise entre 0 et 1.

1. Compléter les déclarations du programme ci-dessus.

2. On note $U$, $V$, $W$, $T$ les variables aléatoires réelles égales aux valeurs se trouvant dans les variables `u`, `v`, `w` et `t` du programme ci-dessus.
Quelles sont les lois suivies par $U$, $V$, $W$, $T$ ?

3. Déterminer les espérances et variances de $W$ et $T$.
Comment peut-on justifier l'égalité des variances ? Déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(W,T)$.

4. Compléter le programme précédent pour que $Z$ soit la variable aléatoire égale au minimum des variables `y[1]`, `y[2]`,...,`y[n]`.

5. Déterminer la loi de $Z$, ainsi que l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire $Z$.

On considère les lancers successifs (indépendants) d'une pièce non pipée et on note $T$ le nombre de Face précédant le premier Pile. On propose à un joueur la suite de paris suivante :

• Pari $P_0$ : si $T = 0$, on perd 1 Euro ; si $T = 1$, on gagne 3 Euros ; sinon on ne gagne ni ne perd rien ;
• Pari $P_1$ : si $T = 1$, on perd 4 Euros ; si $T = 2$, on gagne 9 Euros ; sinon, on ne gagne ni ne perd rien ;
• Pari $P_2$ : si $T = 2$, on perd 10 Euros ; si $T = 3$, on gagne 27 Euros ; sinon, on ne gagne ni ne perd rien ;

...

• Pari $P_n$ : si $T = n$, on perd $3^n + 1$ Euros ; si $T = n + 1$, on gagne $3^{n+1}$ Euros ; sinon, on ne gagne ni ne perd rien ;

*etc.*

1. Chaque pari est-il favorable au joueur ?
2. Calculer l'espérance du gain $\Gamma$ si le joueur parie sur la suite de tous les résultats. Explication ?

1. Soit $U$ et $V$ deux variables à densité sur $\mathbb{R}_+$. On note $F$ la fonction de répartition de $U$ et $g$ une densité de $V$.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} F\left(\frac{z}{v}\right) g(v)\, dv$ converge pour tout $z \in \mathbb{R}_+$.

On admet que si $U$ et $V$ sont indépendantes, alors

$$(\forall\, z \in \mathbb{R}_+) \quad P(UV \leqslant z) = \int_0^{+\infty} F\left(\frac{z}{v}\right) g(v)\, dv$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = X_1 X_2 \ldots X_n$ (produit des $n$ variables $X_1, \ldots, X_n$) et on note $F_n$ (resp. $f_n$) la fonction de répartition (resp. une densité) de $Z_n$.

2. Montrer que $(\forall\, n \geqslant 2)$ $(\forall\, z \in ]0,1])$ $\quad F_n(z) = z + z \displaystyle\int_z^1 \frac{1}{u^2} F_{n-1}(u)\, du$.

3. Montrer que $(\forall\, n \geqslant 2)$ $(\forall\, t \in ]0,1])$ $\quad f_n(t) = \displaystyle\int_t^1 \frac{1}{u} f_{n-1}(u)\, du$

4. En déduire une expression explicite de $f_n$.

5. Déterminer la fonction de répartition $F_n$ de $Z_n$.

On considère une population dont l'effectif aléatoire à chaque instant $n = 0, 1, 2, \ldots$ est noté $X_n$. On suppose qu'à l'instant $n = 0$, la taille de la population est égale à 1 soit $X_0 = 1$. Entre l'instant $n$ et l'instant $n + 1$, et indépendamment pour chaque $n$, la population entière double ou est totalement détruite, chacune de ces éventualités se produisant avec la probabilité $\frac{1}{2}$, puis un individu s'ajoute à la population. On note $Y_n$ la variable aléatoire égale à 1 ou à 0 selon que c'est la première ou la seconde des deux éventualités précédentes qui se produit entre les instants $n$ et $n+1$.

1. Préciser la loi des variables aléatoires $Y_n$. Que peut-on dire de ces variables aléatoires ?

2. a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire $X_{n+1}$ en fonction de $X_n$ et $Y_n$.

b) En déduire l'ensemble $E_n$ des valeurs prises par la variable aléatoire $X_n$.

c) Les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont-elles indépendantes ?

d) La suite d'événements $(X_n = 1)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle forme d'événements indépendants ?

3. a) Déterminer la loi des variables aléatoires $X_1$, $X_2$, $X_3$.

b) Plus généralement, déterminer la loi de la variable aléatoire $X_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $X_n$ en fonction de $n$.

4. Montrer que la suite $(X_n)$ converge en loi quand $n$ tend vers l'infini et préciser sa limite.

Dans tout l'exercice $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, ¶)$ et à valeurs dans $[0,1]$, qui sont indépendantes, à densité et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. On note pour $n$ entier naturel non nul, $f_n$ une densité de $S_n$ et $F_n$ sa fonction de répartition.

a) Indiquer une relation entre $f_{n+1}$ et $f_n$.

b) En déduire l'expression de $F_n(x)$ pour $x \in [0,1]$.

c) Déterminer, en fonction de $n$, le plus grand entier $k$ tel que $F_n$ soit de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

2. Si $\omega \in \Omega$ on pose $N(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \ / \ S_n(\omega) > 1\}$, s'il existe $n \geqslant 1$ tel que $S_n(\omega) > 1$ et sinon, on pose $N(\omega) = 0$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $N$.

b) Montrer que $N$ possède une espérance et une variance et les calculer.

3. Donner la valeur de $P\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n \geqslant n-1)\right)$

1. Montrer que pour tout polynôme $P$ à coefficients réels, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente et préciser, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,dt$.

2. Soit $A$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = (i+j-2)!$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

a) Montrer que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont $n$ réels et qu'on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a

$$ {}^tXAX = \int_0^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1} \right)^2 \mathrm{e}^{-t}\,dt $$

b) En déduire que toutes les valeurs propres de $A$ sont strictement positives. $A$ est-elle inversible ?

3. Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs réelles positives pour laquelle il existe $n$ réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $X$ admette pour densité la fonction $f$ définie par :

$$ \forall\, t \in \mathbb{R}^+, f(t) = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1} \right) \mathrm{e}^{-t} \text{ si } t \geqslant 0, \text{ et } \forall\, t < 0, f(t) = 0 $$

a) Préciser la valeur de $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \,.\, (i-1)!$

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X$ admet un moment d'ordre $k$ et exprimer $m_k = E(X^k)$ en fonction des $x_i$.

c) Montrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est entièrement déterminé par le $(n-1)$ uplet $(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})$.

d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})$ pour que $X$ suive la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

On dispose de $n$ urnes numérotées de 1 à $n$ et de $N$ boules numérotées de 1 à $N$ où $N = an$, $a$ étant un entier fixé non nul. On place « au hasard » et de manière indépendante chacune des $N$ boules dans une des urnes (chaque boule est donc placée avec la probabilité $\dfrac{1}{n}$ dans l'urne numéro $k$).
On note :

$Y_n$ le nombre d'urnes vides.

$T_i$ la variable qui vaut 1 si l'urne numéro $i$ est vide et 0 sinon.

$S_n = \dfrac{Y_n}{n}$.

1. Donner la loi de $T_i$ et son espérance.
2. Calculer $E(T_iT_j)$ et $\mathrm{Cov}(T_i, T_j)$.
3. Calculer $E(S_n)$ et sa limite quand $n$ tend vers l'infini.
4. Calculer $V(S_n)$ et sa limite quand $n$ tend vers l'infini.
5. a) Vérifier que $\forall\,\omega \in \Omega, |S_n(\omega) - \mathrm{e}^{-a}| \leqslant |S_n(\omega) - E(S_n)| + |E(S_n) - \mathrm{e}^{-a}|$.
   b) En déduire que :
   $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\, n_0, \forall\, n \geqslant n_0, P(|S_n(\omega) - \mathrm{e}^{-a}| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|S_n(\omega) - E(S_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2})$.
   c) Montrer que $\forall\,\varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to\infty} P(|S_n(\omega) - \mathrm{e}^{-a}| \geqslant \varepsilon) = 0$.

On admettra, sans démonstration, la formule :

$$\forall\, x \in [0,1[, \forall\, r \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{C}_{r+k}^{r} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

On dispose d'une urne contenant une proportion $p$ de boules rouges et $q = 1-p$ de boules vertes ($0 < p < 1$). On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise et on note, pour $r \in \mathbb{N}^*$, $X_r$ la variable aléatoire définie par :

$X_r = k$ si $k$ est le nombre de boules vertes tirées avant l'apparition de la $r^{\text{ème}}$ème boule rouge et $X_r = -1$ si l'on obtient jamais $r$ boules rouges.

On dit que $X_r$ suit la loi $J(r,p)$.

1. Donner la loi de $X_1$ et son espérance.

2. a) Donner, pour $k \in \mathbb{N}$, l'expression de $P(X_r = k)$.

   b) Que vaut $P(X_r = -1)$ ?

   c) Calculer $E(X_r)$.

3. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables indépendantes telles que, pour tout $n$, $X_n$ suit la loi $J(n, p_n)$ où $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-p_n) = \lambda$, avec $\lambda > 0$.

Montrer que $(X_n)$ converge en loi vers une variable $X$ dont on déterminera la loi.

4. On suppose dans cette question que $X$ suit la loi $J(2,p)$.

   a) Montrer que $\forall\, x \in [0,1[, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

   ( on remarquera que $\dfrac{x^k}{k} = \displaystyle\int_0^x t^{k-1}\, dt$ ).

   b) Calculer $E\left(\dfrac{1}{X+2}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portent le numéro 1, deux boules portent le numéro 2, ..., deux boules portent le numéro $n$.

On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant : si les deux boules obtenues portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant, si les deux boules portent le même numéro, elles ne sont définitivement éliminées.

On note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider complètement l'urne.
On note $Y_1$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour $i \in [\![2, n]\!]$, on note $Y_i$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une $i^{\text{ème}}$ paire de boules portant le même numéro, **à partir du retrait** d'une $(i-1)^{\text{ème}}$ paire de boules.

1. a) Quelle relation lie $X_n$ à $Y_1, \ldots, Y_n$ ?

   b) Déterminer la loi de $Y_1$. Plus généralement, déterminer pour $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de $Y_i$. Quelle est son espérance ?

   c) En déduire que $E(X_n) = n^2$.

2. a) Dans les cas $n = 1$, puis $n = 2$, déterminer la loi de $X_n$.

   b) On suppose $n = 3$. Montrer que :
$$\forall\, k \geqslant 3, P(X_3 = k) = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{4}{5}\Big)^{k-2} - \Big(\frac{2}{3}\Big)^{k-2}\Big]$$

3. On revient au cas général.

   a) Montrer que $P(X_n = n) = \dfrac{2^n n!}{(2n)!} \mp$

   b) Exprimer $P(X_n = n+1)$ à l'aide de termes de la suite $(h_k)$ définie, pour $k \geqslant 1$, par $h_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} \mp$